Le Théorème de FERMAT

Pierre de Fermat (1601-1665) écrivit en marge d'un exemplaire des Œuvres de Diophante (IVème siècle) l'énoncé suivant :

« Cubum in duos cubos aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum, ultra quadratum, potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere.

« Cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi, hanc marginis exiguitas non caperet. »

« Un cube en deux cubes, ni une quatrième puissance en deux quatrièmes puissances, ni en général, aucune puissance au-delà de quatre et jusqu'à l'infini, ne peut s'exprimer par la somme des deux mêmes puissances.

« J'ai trouvé une **démonstration tout à fait merveilleuse** de cette chose, que l'exiguïté de la marge ne peut contenir. »

En langage moderne cet énoncé de Fermat s'écrit ainsi:

$\boxed{a^n = b^n + c^n}$ solution impossible pour a, b, c, n,
entiers positifs > 0, et n > 2
a > b > c, et a, b, c premiers entre eux. [1]

- Observons que si a, b, c, n, ne sont pas entiers, on peut toujours trouver des solutions à cette équation.

Fermat n'a pas laissé à la postérité sa « démonstration tout à fait merveilleuse ». Trois siècles durant les mathématiciens l'ont cherchée, en vain. En 1993, un anglais, Andrew Wiles a fait une démonstration en 200 pages (!) de ce théorème par une méthode analytique moderne.

Mais si nous voulons découvrir la démonstration que Fermat a faite, il faut utiliser les procédés de calculs qu'il avait à son époque : à savoir les opérations arithmétiques sur les polynômes, en particulier la formule du binôme, le triangle de Pascal, et la formule qui exprime par un polynôme la différence de deux puissances : $a^n - b^n$.

Grâce à ses formules, nous pouvons préciser quelles sont les conditions nécessaires par lesquelles l'énoncé de Fermat serait possible.

---

[1] En effet, si a, b, et c ont un diviseur commun (par exemple 3 nombres pairs)
L'équation se simplifie et on retrouve des nombres premiers entre eux.

Réflexion sur les puissances

Combien y a-t-il de puissances entières (supérieures ou égales à 2) de nombres entiers jusqu'à 10 milliards (10^{10}) ? Pour le plus petit nombre : 2, la puissance s'élève jusqu'à 33 : 2^{33}. Pour le plus grand nombre possible : 100 000, la puissance s'élève seulement à 2 : $100\,000^2$. La somme de toutes ces nombres dépasse légèrement 100 000 (plusieurs nombres se recoupent). La proportion est donc voisine de **1 nombre sur 100 000**, puissance entière d'un nombre entier : c'est peu ! Dès lors, nous voyons qu'il sera difficile de trouver la somme de deux puissances égale à une troisième. Reste à démontrer cette impossibilité.

La somme de deux carrés peut donner un carré : $3^2 + 4^2 = 5^2$; $6^2 + 8^2 = 10^2$: expression du théorème de Pythagore. [2]

La formule du binôme de Newton

Elle s'écrit ainsi :

$$(a+b)^n = a^n + \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{1}} a^{(n-1)} b + \frac{\mathbf{n(n-1)}}{\mathbf{1.2}} a^{(n-2)} b^2 + \frac{\mathbf{n(n-1)(n-2)}}{\mathbf{1.2.3}} a^{(n-3)} b^3 + \ldots + \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{1}} a b^{(n-1)} + b^n$$

Les coefficients (écrits en gras) de cette formule sont donnés facilement par le triangle de Pascal que voici :

1	
1 1	pour n = 1
1 2 1	n = 2
1 3 3 1	n = 3
1 4 6 4 1	n = 4
1 5 10 10 5 1	n = 5
1 6 15 20 15 6 1	n = 6
1 7 21 35 35 21 7 1	n = 7
1 8 28 56 70 56 28 8 1	n = 8

etc…

Chacun des nombres est obtenu par la somme des deux nombres qui sont au-dessus de lui, sur la ligne supérieure.

---

[2] Voir en annexe la démonstration géométrique du théorème de Pythagore.

La différence de deux puissances entières : $a^n - b^n$ s'exprime ainsi :

$$a^n - b^n = (a-b)(\mathbf{a^{(n-1)}} + \mathbf{a^{(n-2)}b} + \mathbf{a^{(n-3)}b^2} + \mathbf{......} + \mathbf{b^{(n-1)}})$$

On constate que tous les termes du polynôme (en gras) sont positifs et entiers.

Première condition nécessaire : $\boxed{n < c}$

Rappel : $a > b > c$: condition de départ
Posons : $a = c+i$ et $b = c+j$; $i > j$

$a^n = b^n + c^n \Longrightarrow a^n - b^n = c^n$

Remplaçons a et b par leurs valeurs :

$(c+i)^n - (c+j)^n = c^n$ Développons :

$$c^n + \frac{n}{1}c^{(n-1)}i + ...+ i^n - c^n - \frac{n}{1}c^{(n-1)}j - .... - j^n = c^n$$

c^n s'en va dans le premier membre; il reste, après mise en facteur :

$$\frac{n}{1}c^{(n-1)}(i-j) + ...+ (i^n - j^n) = c^n$$

Comme $i > j$, $(i-j)$ est un entier positif.

Si <u>$n = c$</u>, le premier terme du premier membre devient : $c^n(i-j)$.

A lui seul, il est plus grand que c^n, le second membre.

Si $(i-j) = 1$, le premier terme du premier membre égale le second membre.

Si <u>$n > c$</u>, plus vrai encore !

Il faut donc que $\boxed{n < c}$

Nous voyons qu'au minimum, $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$, et $n = 3$.

Deuxième condition nécessaire $\boxed{a-b < c}$

Posons $a = b+d$ $\quad a-b = d$ (d entier positif, car $a>b$)

$a^n = b^n + c^n \Longrightarrow a^n - b^n = c^n$

Remplaçons a par sa valeur :

$(b+d)^n - b^n = c^n$

Développons : $(b^n + \ldots\ldots + d^n) - b^n = c^n$

b^n s'en va.

Si $a-b > c \Longrightarrow d > c \Longrightarrow$ et $d^n > c^n$

Alors le dernier terme du premier membre est plus grand que le second membre.

Il faut donc que $\boxed{a-b < c}$

Si $a-b = c$ alors $d = c$ et $d^n = c^n$

Il faut que $\boxed{a-b \neq c}$

°°°°°°°°°°°°°°°°°°°

Abbé Joseph Grumel

<u>Considération</u>

Il est évident que Fermat connaissait le théorème de Pythagore; il est donc possible qu'il soit parti de là pour trouver sa « **démonstration tout à fait merveilleuse** ».

Dans le cas de « Pythagore » : n = 2.
Dans le cas de « Fermat » : n > 2

Posons $\boxed{n = 2 + t}$ (t entier positif ≥ 1)

Dans l'énoncé de Fermat, remplaçons **n** par sa valeur :

Il vient: $a^{2+t} = b^{2+t} + c^{2+t}$

Ce qui s'écrit: $a^2a^t = b^2b^t + c^2c^t$

Divisons par a^t : $a^2 = \frac{b^2b^t}{a^t} + \frac{c^2c^t}{a^t}$

Que l'on peut écrire : $$\boxed{a^2 = b^2\left(\frac{b}{a}\right)^t + c^2\left(\frac{c}{a}\right)^t.}$$

Considérations : $\left(\frac{b}{a}\right) < 1$ et $\left(\frac{c}{a}\right) < 1$ car a>b>c,

$b^2\left(\frac{b}{a}\right)^t < b^2$ et $c^2\left(\frac{c}{a}\right)^t < c^2$

Comme a, b, c, sont premiers entre eux, et t un entier positif, $b^2\left(\frac{b}{a}\right)^t$ et $c^2\left(\frac{c}{a}\right)^t$ ne peuvent être tous deux entiers. Leur somme le peut-elle et redonner le carré de a ?

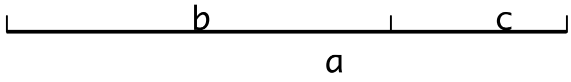
Si t = 0, alors $(b/a)^0 = 1$ et $(c/a)^0 = 1$,
et $a^2 = b^2 + c^2$: solution entière possible (Pythagore).

Marie-Pierre Morel

°°°°°°°°°°°°°°°°°°

Etude géométrique de l’équation de Fermat.

Ecrivons le nombre a sous la forme d’un segment de droite. Si l’on écrit $a = b + c$, cela veut dire que l’on divise ce segment en deux segments b et c .



Si on élève a une puissance n, il faut écrire :

$a^n = (b + c)^n$ Développons :

$$a^n = b^n + \frac{n}{1} b^{(n-1)} c + \frac{n(n-1)}{1.2} b^{(n-2)} c^2 + ... + c^n$$

Si l’on supprime tous les termes du second membre sauf le premier et le dernier, on retrouve l’équation de Fermat :

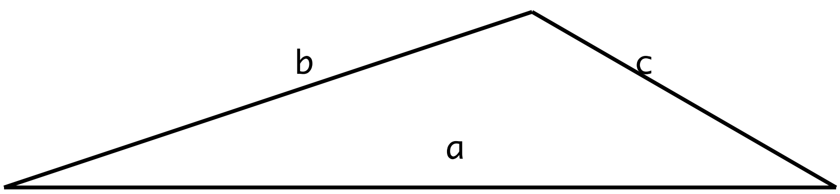
$a^n = b^n + c^n$

Pour qu’une égalité soit encore possible avec a^n, il est alors impérieux que $b + c > a$

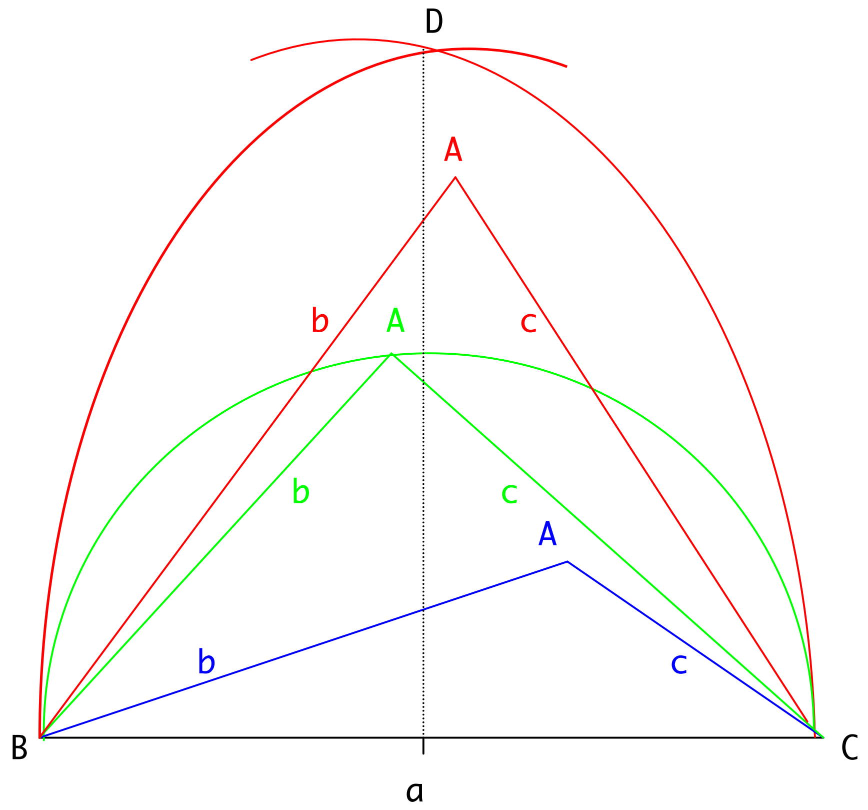
Nous avons donc entre les trois nombres a, b, c les deux relations suivantes :

$a > b > c$ et $b + c > a$

Ce qui montre que a, b, et c sont les côtés d’un triangle quelconque, dont a est le plus grand côté.



Ainsi l'équation $a^n = b^n + c^n$ pour $n > 1$ représente tous les triangles de base **a** compris dans un plan délimité par les deux cercles de rayon a et de centres B et C (extrémité du segment a).Du fait que $a > b > c$ la figure est en effet limitée à ce plan. (figure ci-dessous)



Si n = 2 le sommet A du triangle se situe sur la circonférence du cercle de diamètre a ; l'angle A est droit. Cas de Pythagore.

Si n > 2 (cas de Fermat) le sommet A des triangles est situé au-dessus du demi-cercle de diamètre a. l'angle A est aigu.

Si 1 < n < 2 le sommet A des triangles est à l'intérieur du demi-cercle de diamètre a ; L'angle A est obtu.

Il est aisé de dessiner les lieux géométriques du point A selon les valeurs que l'on donne à **n** ; Quand n tend vers l'infini le point A se rapproche de D, sommet du triangle équilatéral de côté a.

Si l'on se donne un triangle dont les trois côtés sont des nombres entiers, on observera que **n** ne peut pas être un nombre entier (sauf pour n = 2)

Pour n = 1, on reste sur la droite BC.

Exemples numériques :

Pour **n** = 3

Prenons **a** = **10**

Si b = 9, alors c = 6,47
Si b = 8, c = 7,87
Si b = 7, c = 8,69
Si b = 6, c = 9,22
Si b = 5, c = 9,56
Si b = c = 7,93

Pour **n** = 6

et **a** = **10**

Si b = 9 alors c = 8,81
Si b = 8, c = 9,5
Si b = 7, c = 9,79
Si b = 6, c = 9,92
Si b = c = 8,9

Pour **n** = **10**

Et **a** = **10**

Si b = 9, c = 9,58
Si b = 8, c = 9,88
Si b = 7, c = 9,97
Si b = 6, c = 9,99
Si b = c = 9,33

Pour **n** = **20**

Et **a** = **10**

Si b = c = 9,659
Si b = 8, alors c = 9,93
Si b = 7, c = 9,9996
Si b = 5, c = 9,999999

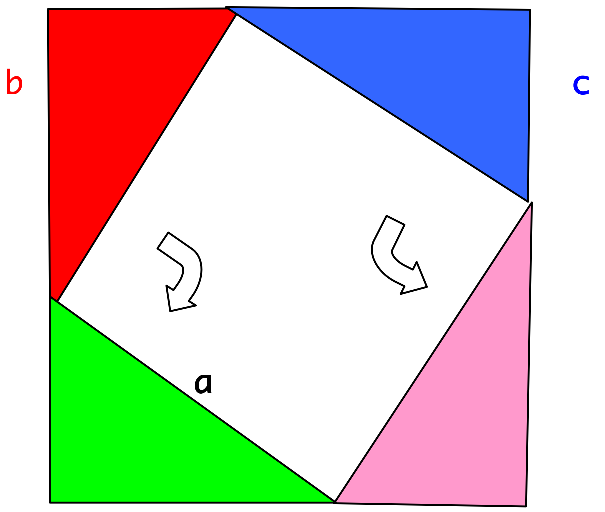
On peut dessiner facilement ces triangles représentés par ces nombres.

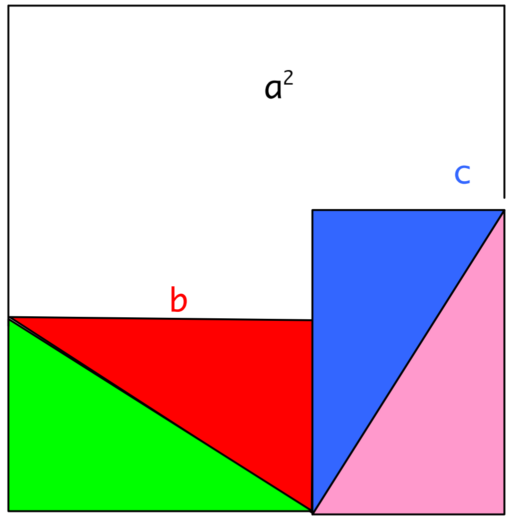
Lorsque n devient grand le lieu de A reste très voisin des cercles de rayon a et de centre B et C.

°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°

*Abbé Joseph **Grumel** (professeur honoraire de math)*

Annexe: Démonstration géométrique du théorème de Pythagore





$$a^2 = b^2 + c^2$$