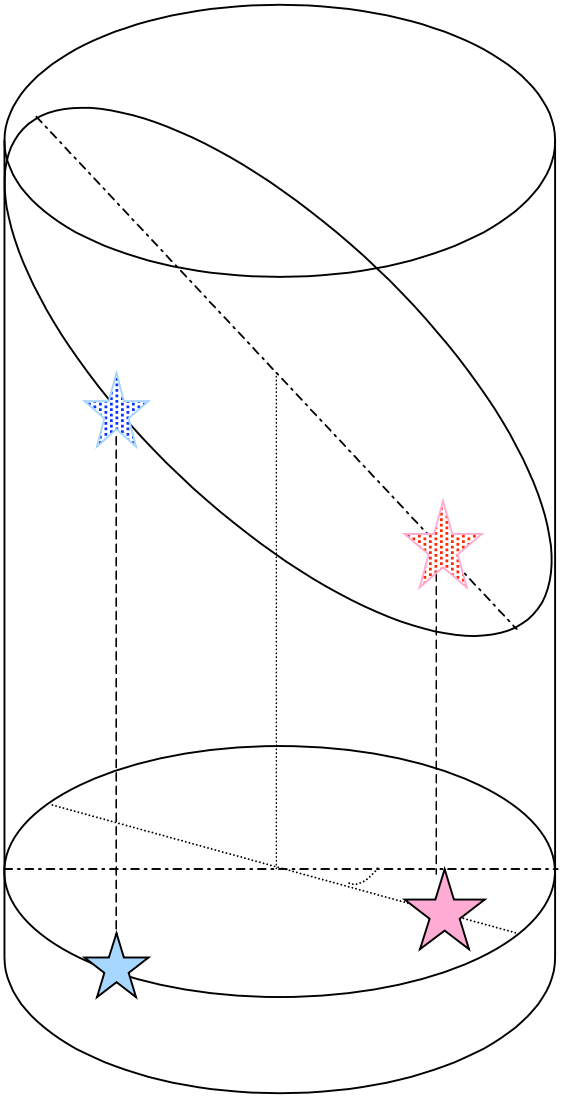
Abbé Joseph Grumel ★ ★ *Marie-Pierre Morel*

Géométrie

des Etoiles Doubles

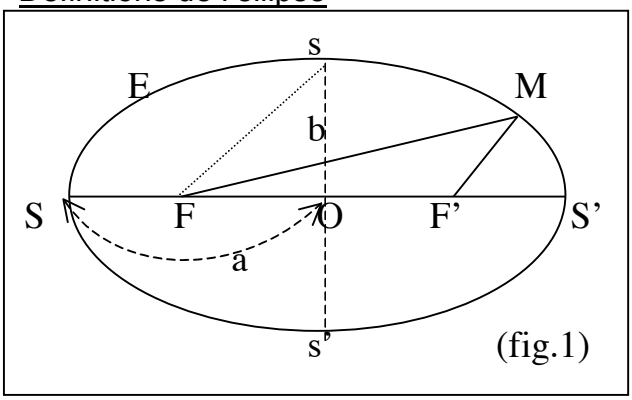


La géométrie des étoiles doubles

Chapitre premier : Géométrie de l'ellipse

Notre but est de rappeler les notions géométriques indispensables à la bonne intelligence du sujet qui nous intéresse ici : les étoiles doubles.

Définitions de l'ellipse



(fig.1)

Soit F et F' les foyers de l'ellipse E.
Soit **a** son demi grand axe, tel que a = SO = OS'.

Tout point M tel que FM + F'M = 2a, est sur l'ellipse.

1ère définition :
L'ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. (ces deux points fixes sont F et F')

La droite SS' passant par les foyers s'appelle le « grand axe ». O en est le centre, milieu du segment FF'. La perpendiculaire en O à SS' est le « petit axe ». On appelle **b** le demi petit axe.

Le grand axe rencontre l'ellipse aux points S et S' qui sont les sommets principaux, alors que les sommets secondaires sont les intersections du petit axe et de l'ellipse : s et s'.

Lorsque M est en s, on a : $Os^2 + OF^2 = \mathbf{a}^2$; de même par symétrie en s'.
Lorsque M parvient au point S, on a : OS = OM = **a** ; de même par symétrie en S'

Excentricité : On appelle excentricité de l'ellipse le rapport : OF/OS = e
De même par symétrie OF/OS' = e

Lorsque les foyers F et F' sont confondus avec O, l'ellipse devient un cercle : OF = 0, alors e = 0. Cas particulier de l'ellipse.
Inversement, lorsque F se déplace vers S, l'excentricité tend vers le nombre 1.
Lorsque F est en S (F' en S'), e = 1. L'ellipse se réduit au segment de droite SS' = FF'.

Construction de l'ellipse - bien connue : par deux épingles plantées dans la feuille de papier, on fait tourner une pointe de crayon retenue par un anneau de fil passant entre les deux épingles et maintenu tendu. La pointe de crayon décrit une ellipse dont les foyers sont les pointes des deux épingles. Cette construction dérive directement de cette définition de l'ellipse.

Rapport des axes et de l'excentricité :
De la définition de l'excentricité, il résulte que : OF = e.OS ; OF = e.a

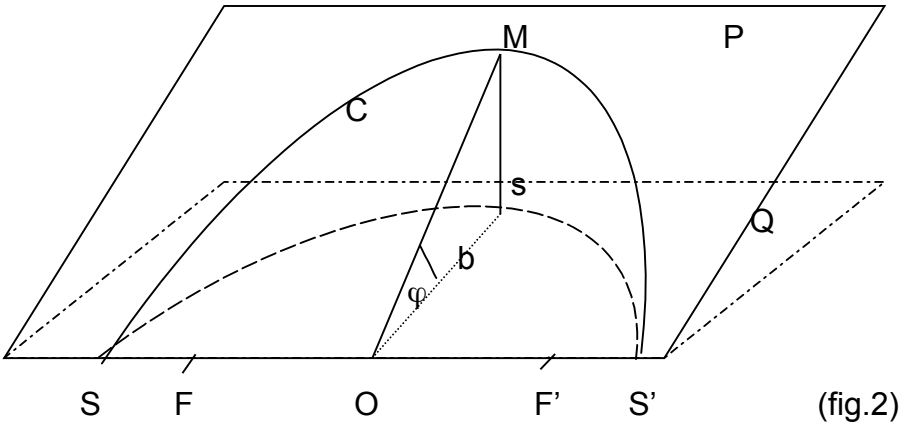
On aura donc en considérant le triangle rectangle OsF : $a^2 = b^2 + a^2e^2$ d'où $b^2 = a^2 - a^2e^2$

$b^2 = a^2 (1 - e^2)$, (1) et $b = a\sqrt{(1-e^2)}$ Cette formule est importante.

FS = a – OF = a – ea , donc FS = a (1 – e) ; semblablement en F'S'

FS' = a + ea , donc FS' = a (1 + e) semblablement en F'S

2ème définition : *L'ellipse est la projection orthogonale du cercle.*



(fig.2)

Soit P le plan du cercle C. Si de chaque point de la circonférence du cercle, on abaisse sur un second plan Q, les perpendiculaires à ce plan Q, le lieu des points de projection est une ellipse. L'un des diamètres du cercle se projette en vraie grandeur. On peut considérer ce diamètre comme l'intersection des plans P et Q. Ce diamètre est ainsi le grand axe de l'ellipse dont les sommets sont S et S' ; et le centre O est à la fois le centre du cercle projeté et le centre de l'ellipse.

Considérons maintenant le petit axe de l'ellipse : il est la projection du rayon OM, projection perpendiculaire au plan Q**. s,** sommet secondaire, est la projection orthogonale de M sur le plan Q. Le dièdre des deux plans P et Q est l'angle sÔM qui l'on appelle en général φ . En F et F' nous avons les foyers de l'ellipse projetée.

Relation entre l'excentricité **e** et l'angle φ

Nous avons dans le triangle rectangle en **s** : OM cos φ = b, soit : a cos φ = b , d'où

$\cos \varphi = b/a$ et d'autre part : sM = a sin φ.

Donc $b^2 = a^2 \cos^2 \varphi$; en rapprochant de l'équation $_{(1)}$ de la page précédente, on obtient :

$$\cos^2 \varphi = 1 - e^2 \quad (2)$$

Et comme $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ (formule trigonométrique), on déduit :

$\sin^2 \varphi = e^2$, d'où $e = \sin \varphi$

Or OF = a.e = a sin φ , ce qui est la valeur de sM. OF = sM

Projection des aires

Toute aire du plan Q peut être considérée comme la projection de l'aire correspondante du plan P, et sa surface sera déterminée par le cosinus de l'angle φ.

Il en est de même de l'aire de l'ellipse qui est celle du cercle par le cosinus de l'angle φ.

Or l'aire du cercle, c'est $\pi.a^2$, l'ellipse aura donc pour surface $\pi.a^2.\cos \varphi$

Comme a cos φ = b, on obtient : aire de l'ellipse = π.a.b

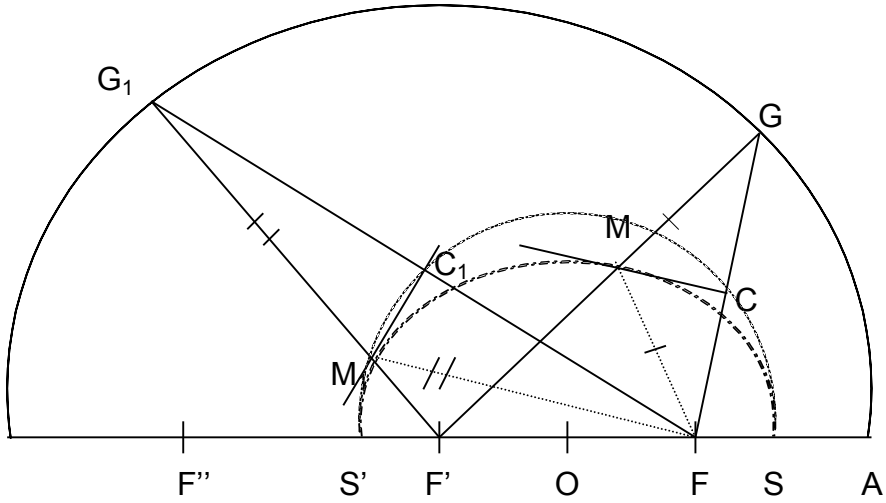
Cercle principal ou **directeur** :

Si l'on dessine sur un même plan l'ellipse et le cercle de diamètre SS' – cette ellipse étant à l'origine la projection du cercle par l'angle φ - ce cercle, qui a pour diamètre le grand axe de l'ellipse, est nommé le cercle principal, et dans certains manuels le **cercle directeur**. Ce cercle joue un rôle important pour l'équation du mouvement que nous verrons plus loin.

3ème définition : *L'ellipse est le lieu géométrique des points équidistants d'un point (F) et d'un cercle, le point considéré étant à l'intérieur du cercle.*

Nous appellerons ce cercle le **cercle générateur**, car il permet une construction géométrique de l'ellipse point par point.

- Notons que cette définition est analogue à celle de la parabole *: lieu des points équidistants d'un point et d'une droite ;* et de l'hyperbole *: lieu des points équidistants d'une point et d'un cercle, le point considéré étant à l'extérieur du cercle.*



(fig.3)

Considérons cette figure. F' est le centre du cercle de rayon F'G = F'A. Donnons à ce rayon la valeur de 2a.

Sur F'A, portons un point F. Traçons FG, puis la médiatrice de FG en C. Elle rencontre F'G au point M.

Reproduisons la même construction en un autre point G_1 du cercle ; traçons $F'G_1$, puis FG_1, puis la médiatrice C_1M_1 ; et ainsi de suite...

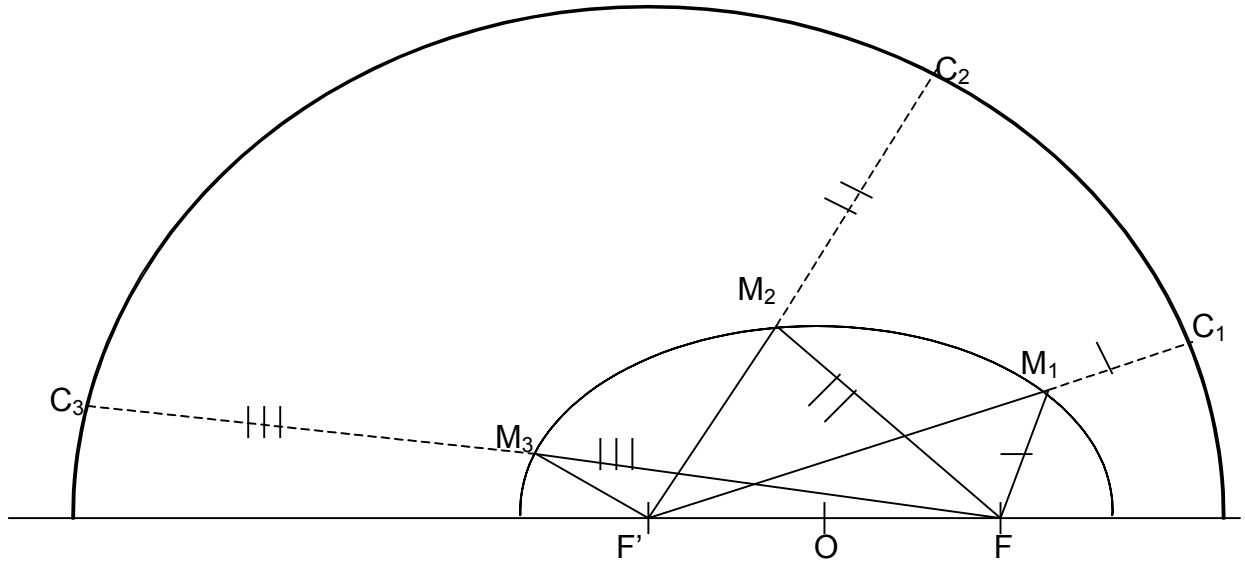
Les points M, M_1,... décrivent une ellipse de foyers F'et F. En effet, les médiatrices tracées déterminent des triangles isocèles : FGM, FG_1M_1, Pour tout point M on a FM = MG

F'M + MG = 2a. Or selon la définition de l'ellipse : F'M + FM = 2a.

Remarquons que le point C milieu du segment FG décrit par homothétie le cercle de centre O , c'est-à-dire le cercle directeur de l'ellipse décrite par le point M. quand G vient en A, les points M et C viennent au milieu du segment FA et déterminent le sommet S de l'ellipse. De même par symétrie à partir de O le sommet S'.

Notons également que si l'on prend un point F'', symétrique de F par rapport à F' centre du grand cercle, on aura une autre ellipse symétrique de la première, dont le centre sera symétrique de O par rapport à F'. Nous verrons plus loin l'importance de ce point F'' pour l'établissement de l'équation du temps.

Inversement, construisons le cercle généré à partir de l'ellipse



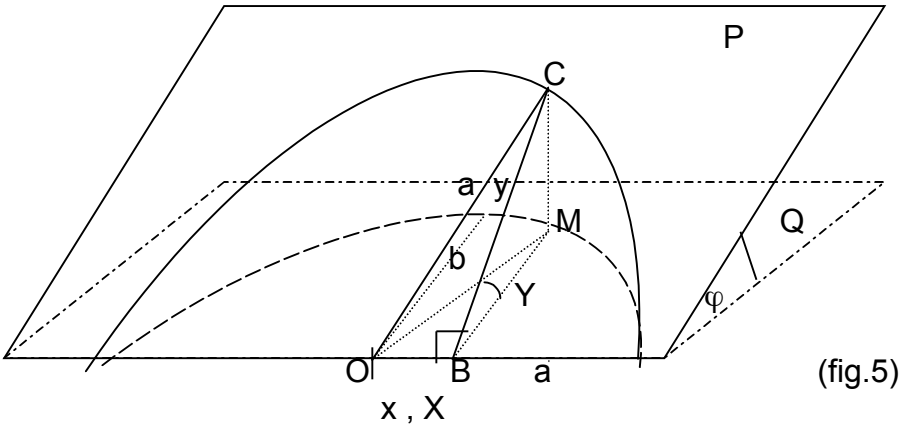
(fig.4)

Nous avons $F'M_1 + M_1F = 2a$. Rapportons la longueur M_1F en M_1C_1. $F'M_1 + M_1C_1 = 2a$. Au compas traçons le cercle généré de centre F', et de rayon 2a. Chaque point M_2, M_3,... de l'ellipse génère le même cercle.
Semblablement pour le cercle généré à partir du foyer F.

Equations de l'ellipse Il existe trois équations pratiques de l'ellipse :

1- L'équation cartésienne rapportée au centre de l'ellipse.
2- L'équation polaire centrale, dont le pôle est le centre de l'ellipse.
3- L'équation polaire focale - à partir de l'un des foyers, que l'on appelle alors « foyer principal ».

1- Soient x et y les coordonnées du point C sur le cercle directeur tracé sur le plan P et de centre O. (L'angle $O\hat{B}C$ est droit).



(fig.5)

OC = a. D'où il suit : $a^2 = x^2 + y^2$. C'est l'équation du cercle.

Soit X et Y les coordonnées du point M sur l'ellipse projetée sur le plan Q.
Nous avons : X = x ; et Y = y.cos φ. Elevons au carré : $Y^2 = y^2.\cos^2\varphi$.
or $\cos^2\varphi = 1 - e^2$ (voir p.2) ; donc $Y^2 = y^2.(1 - e^2)$

Comme cos φ = b/a (p.2) , $1 - e^2 = b^2/a^2$; $Y^2 = y^2 . b^2/a^2$.

D'où l'on tire $y^2 = Y^2 . a^2/b^2$.

En portant cette valeur de y évaluée en fonction de Y et du rapport a/b (b/a est le coefficient d'aplatissement de l'ellipse), dans l'équation du cercle ci-dessus, il vient (rappelons que x = X) :

$$a^2 = X^2 + Y^2 . a^2/b^2.$$

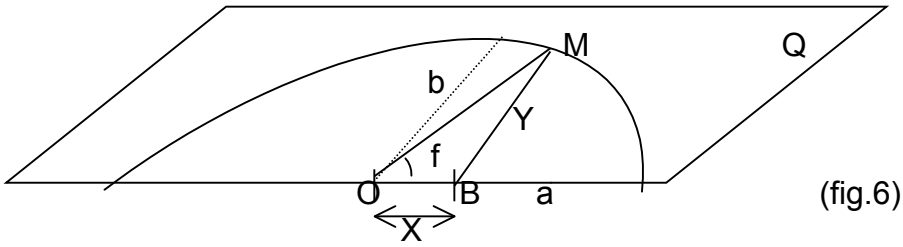
Divisons les deux membres par a^2, on obtient l'équation centrale cartésienne de l'ellipse :

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{(éq.1)}$$

2 – <u>Equation polaire centrale</u>

Il suffit de faire le changement de coordonnées dans l'équation cartésienne ci-dessus, sachant que nous allons considérer l'angle au centre $B\hat{O}M$ = f (voir figure ci-dessous)

X = OM cos f, et Y = OM sin f ; rappelons que $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ (voir p.1)



(fig.6)

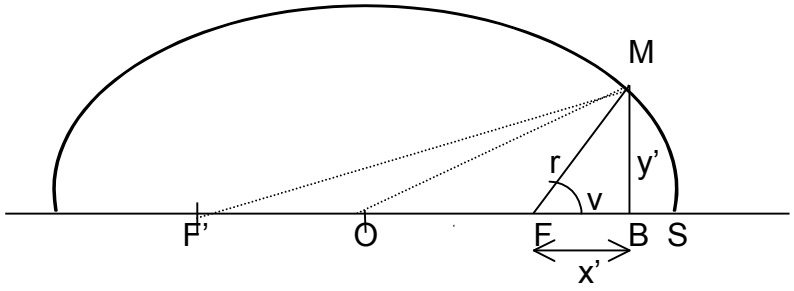
Il vient : $\frac{OM^2 \cos^2 f}{a^2} + \frac{OM^2 \sin^2 f}{a^2(1-e^2)} = 1$ Réduisons au même dénominateur,

$$\frac{OM^2(\cos^2 f - e^2 \cos^2 f + \sin^2 f)}{a^2(1-e^2)} = 1$$

Comme $\sin^2 f + \cos^2 f = 1$, et comme $a^2 (1 - e^2) = b^2$, il vient en posant OM = R

$$\boxed{R^2 = \frac{b^2}{(1 - e^2 \cos^2 f)}} \qquad \text{(éq.2)}$$

3 – Equation polaire focale, (à partir du foyer F)



(fig.7)

OS = a. OF/a = e, donc OF = ae ; Posons FM = r et l'angle $S\hat{F}M$ = v.
Il suffit de faire un changement de variables dans l'équation cartésienne de l'ellipse (éq.1)

Rappelons que OB = X et que y' = Y ; et $b^2 = a^2 (1 - e^2)$
alors x' = X – ae , d'où X = x' + ae
(si l'on prend pour foyer F' : x' = X + ae)

Il vient : $\frac{(x'+ae)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2(1-e^2)} = 1$

Le développement des calculs est long ; au final, et en posant x' = r cos v, on fait apparaître ceci :

$r(1 +/- e\cos v) = a (1 – e^2)$ (éq.3)

Il est plus expéditif de raisonner directement sur la figure ci-dessus :

Nous avons F'M + MF = 2a d'où l'on tire F'M = 2a – r ;
F'F = 2ae, FB = r.cosv, et BM = r.sinV

$F'M^2 = F'B^2 + BM^2$ (pythagore), que nous écrivons : $(2a - r)^2 = (2ae + r.\cos v)^2 + (r.\sin v)^2$
En développant et simplifiant, il vient :

$r(1 + e\cos v) = a (1 – e^2)$ pour le foyer F ; et $r(1 - e\cos v) = a (1 – e^2)$ pour le foyer F'

°°°°°°°°°°°°

Points remarquables de l'ellipse : Sommets et extrémités

Il est important d'avoir la valeur de r pour ces points remarquables.
Il suffit de donner à l'angle v les valeurs qui correspondent à ces points :
Pour v = 0, cosv = 1 ; il vient dans la formule ci-dessus :

$r(1 + e) = a (1 – e^2)$. Comme $(1 – e^2) = (1 + e) (1 – e)$, (carré parfait), il vient en simplifiant :

$r = a (1 - e)$

et pour v = 180°, cosv = -1 , il vient $r = a(1 + e)$

Pour les extrémités **s** et **s'** du petit axe, on écrit r = a ; il vient dans l'équation polaire:

$(1 + e\cos v) = (1 - e^2)$

Remplaçons **1** par : $(\sin^2 v + \cos^2 v)$; il vient après simplification :

$\boxed{e = +/- \cos v .}$ Remarquons que $\sin v = \sqrt{(1 - e^2)}$

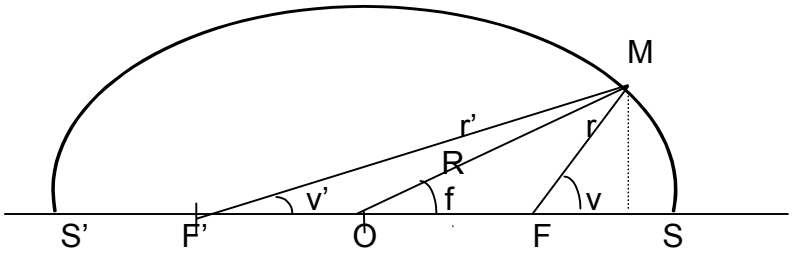
Le paramètre est la perpendiculaire en F ou en F', au grand axe SS', limitée à l'ellipse.

On écrit alors v = 90°, alors cosv = 0, et l'on trouve dans l'équation polaire : $\boxed{r = a(1 - e^2)}$

°°°°°°°°°°°°

Détermination des foyers, axes, angles, etc...

Nous donnons ici les relations les plus importantes entres les différents éléments de l'ellipse.



(fig.8)

Posons OM = R, FM = r, OF = OF' = ae ; l'angle $O\hat{M}F$ = v – f, et l'angle $F'\hat{M}F$ = v – v'
En considérant le triangle OMF, nous avons :

$$\frac{R}{\sin v} = \frac{r}{\sin f} = \frac{ae}{\sin(v - f)} \quad \text{et} \quad \tan f = \frac{r \sin v}{ae + r\cos v}$$

Et relations analogues pour le triangle F'MO.

Et également $OF^2 = a^2e^2 = R^2 + r^2 - 2Rr.\cos(v - f)$ (formule de trigonométrie appliquée au triangle quelconque)
Dans le triangle F'MF : $F'F^2 = 4a^2e^2 = r'^2 + r^2 - 2r'r.\cos(v - v')$

De l'équation polaire focale on tire la relation importante entre r' et r, et v' et v.

$a(1 - e^2) = \boxed{r(1 - e\cos v) = r'(1 - e\cos v')}$

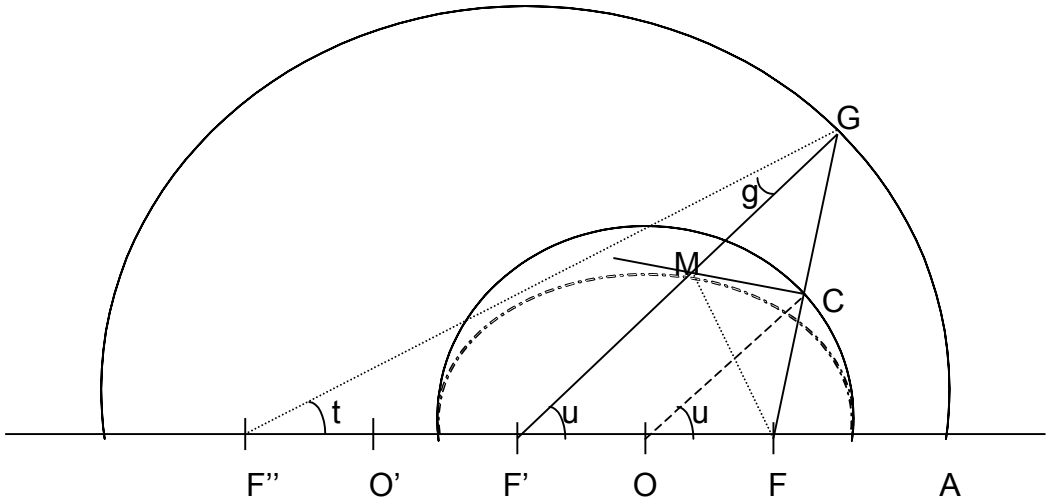
Si l'on considère deux points M_1 et M_2 sur l'ellipse et si on leur applique l'équation polaire focale, en appelant r_1 et r_2 les rayons vecteurs, et v_1 et v_2 les angles relatifs, nous tirons :

$r_1(1 - e\cos v_1) = r_2(1 - e\cos v_2)$, d'où l'on tire l'expression de e :

$$\boxed{e = \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cos v_1 - r_2 \cos v_2}}$$

Si l'on connaît exactement e, cette expression permet la vérification précise de M_1, M_2, M_n sur l'ellipse. On peut d'ailleurs établir une équation semblable à partir de O, avec le rayon R et l'angle f.

Relations algébriques et trigonométriques avec le cercle générateur.



(fig.9)

Relations d'homothétie :

G engendre le cercle générateur de centre F'. Donnons à F'G = F'A la valeur de 2a. F'G = 2a.

C milieu de FG, engendre le cercle directeur de centre O et de rayon OC ;

OC = a ; l'angle $F\hat{F}'G$ = u se retrouve en $F\hat{O}C$ car OC est parallèle à F'G.

OF = OF' = F'O' = O'F'' = ae ; F''F' = 2ae

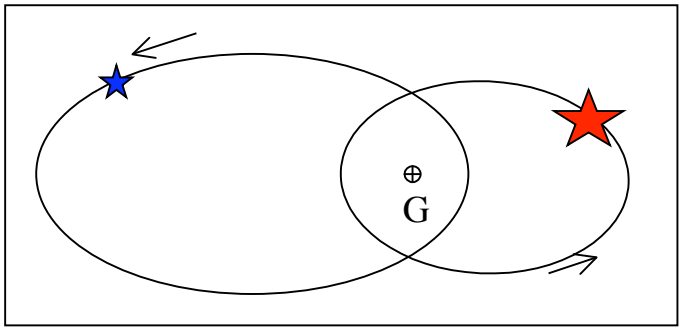
Dans le triangle GF''F' : $\frac{F'G}{\sin t} = \frac{F''F'}{\sin g}$ (formule des sinus appliquée au triangle quelconque)

d'où $\sin g = \frac{\sin t.F''F'}{F'G} = \frac{\sin t.2ae}{2a}$; il vient : $\boxed{\sin g = e.\sin t}$

°°°°°°°°°°°

Chapitre 2 : Ellipse réelle, ellipse apparente et ellipse vraie

L'ellipse réelle

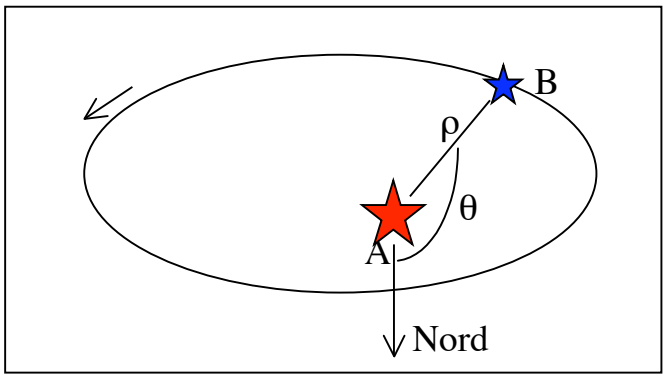


On appelle « ellipse réelle » l'orbite décrite dans l'espace par une étoile dans son mouvement de révolution autour d'une seconde étoile, laquelle décrit également une « ellipse réelle » dans son mouvement de révolution autour de sa compagne.

Le couple tourne autour du centre de gravité commun (G).

L'étoile la plus massive décrit la plus petite orbite : elle n'est que peu « remuée » par sa compagne. C'est le cas du couple « Terre-Lune » où les deux astres décrivent chacun une ellipse réelle autour de G (qui se trouve encore à l'intérieur du globe terrestre, à ...).

L'ellipse apparente (relative)

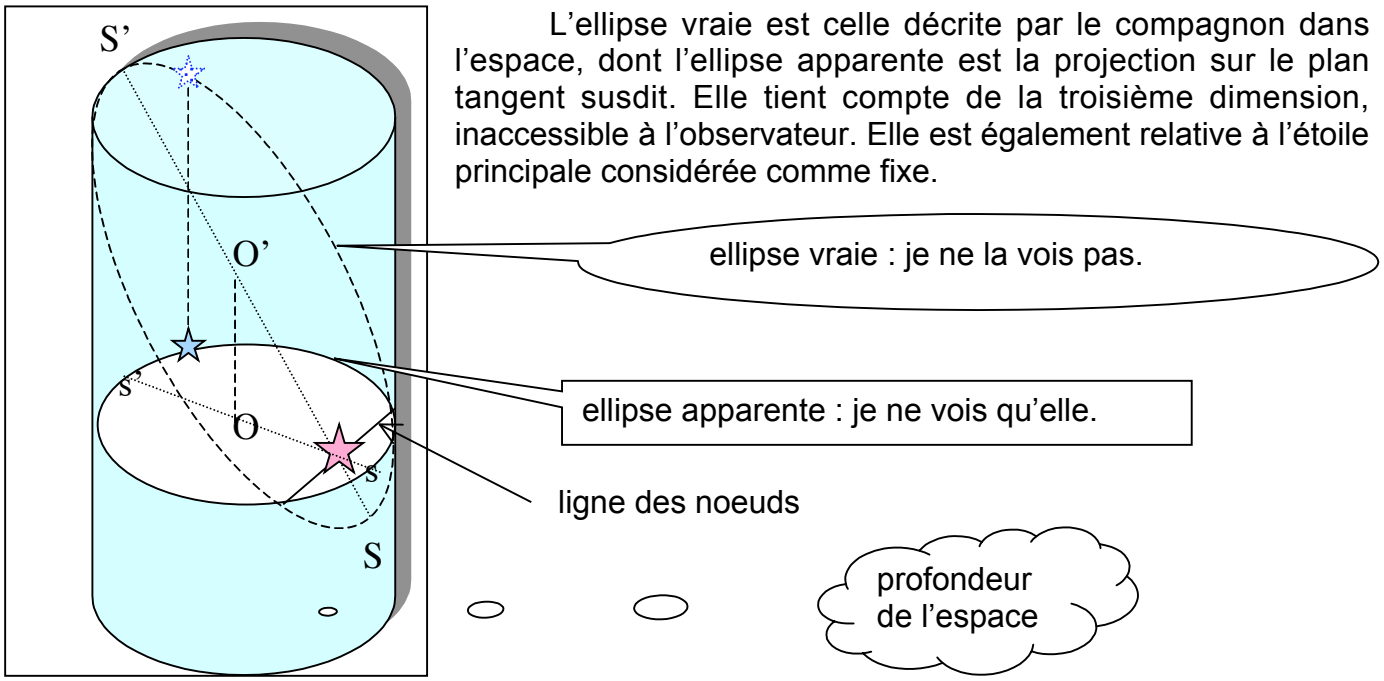


« L'ellipse apparente » est, comme le mot l'indique, celle qui apparaît au regard. Elle se dessine sur le plan tangent à la sphère céleste par le mouvement du compagnon B autour de l'étoile principale A (la plus lumineuse) que l'on prend alors comme point de référence. Celle-ci, considérée comme fixe, sera l'origine des mesures : mesures relatives à cette étoile, d'où la notion « d'orbite relative ». ρ mesure l'écartement des deux étoiles (en secondes d'angle), et θ l'angle qu'elles font par rapport à une direction donnée.

L'ellipse apparente ne tient pas compte de la profondeur de l'espace.

Remarquez que l'étoile principale, en règle générale, n'occupe pas l'un des foyers de l'ellipse.

L'ellipse vraie (relative)



L'ellipse vraie est celle décrite par le compagnon dans l'espace, dont l'ellipse apparente est la projection sur le plan tangent susdit. Elle tient compte de la troisième dimension, inaccessible à l'observateur. Elle est également relative à l'étoile principale considérée comme fixe.

Remarquons tout de suite que :

1- L'étoile principale est toujours au foyer de l'ellipse vraie,

2- L'ellipse vraie et l'ellipse apparente ont en commun l'étoile principale et la ligne des noeuds : intersection des deux ellipses.

3- Comme l'orbite apparente est la projection de l'orbite vraie, elle lui est donc nécessairement plus petite - ou égale.

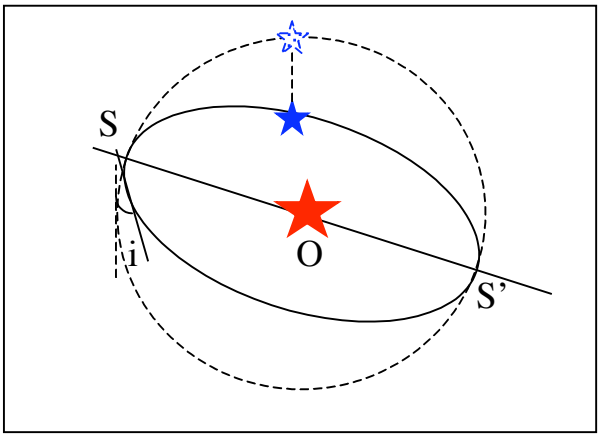
4- Les centres O et O' des deux orbites sont superposés : sur le dessin l'un au-dessus de l'autre sur une même verticale.

Les considérations 1 et 4 permettent de tracer la projection s's sur l'orbite apparente du grand axe S'S de l'orbite vraie: condition indispensable au « relèvement géométrique de l'orbite apparente ».

Nous nous proposons dans ce chapitre d'établir les relations algébriques et trigonométriques qui permettent de passer des coordonnées du compagnon sur l'ellipse apparente aux coordonnées de sa projection sur l'ellipse vraie, et réciproquement.

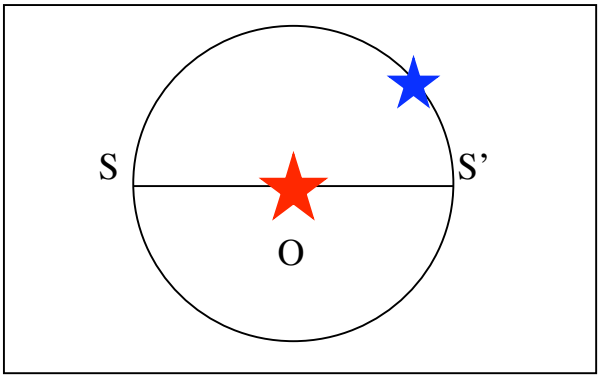
Nous avons dit que l'étoile principale peut se trouver n'importe où sur la surface de l'ellipse apparente, mais dans certains cas particuliers, on peut se faire une idée très juste de l'ellipse vraie, à ne considérer que la position de l'étoile principale.

1 – L'étoile principale est au centre de l'ellipse apparente.



Dans ce cas, l'orbite vraie est un cercle : F et F' sont en O. Le grand axe de l'orbite apparente est le diamètre de ce cercle, en même temps que la ligne des noeuds.

La seule mesure de l'excentricité de l'orbite apparente permet de se faire une idée de l'inclinaison i des deux plans.

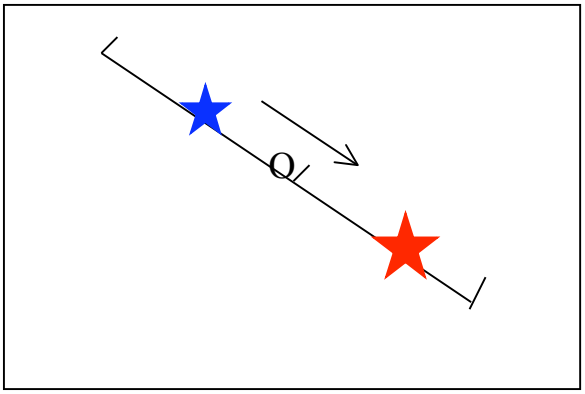


Si l'orbite apparente est un cercle, alors les deux orbites sont confondues.

L'étoile double est vue de face.

e = 0 ; SS' = 2a.

2 – L'orbite apparente est une droite.

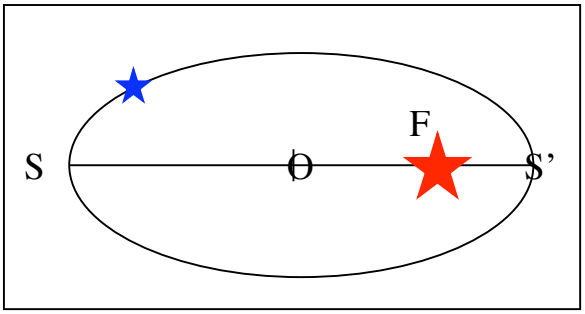


Alors l'orbite vraie est vue sur la tranche. Au cours de leur période les deux étoiles vont s'occulter mutuellement.

Ces étoiles doubles à éclipses sont appelées « Algolides » du nom de l'étoiles type : Algol (Bêta Perseus)

Le segment de droite parcouru par l'étoile secondaire aura pour longueur au plus le grand axe de l'orbite vraie, au moins le petit axe.

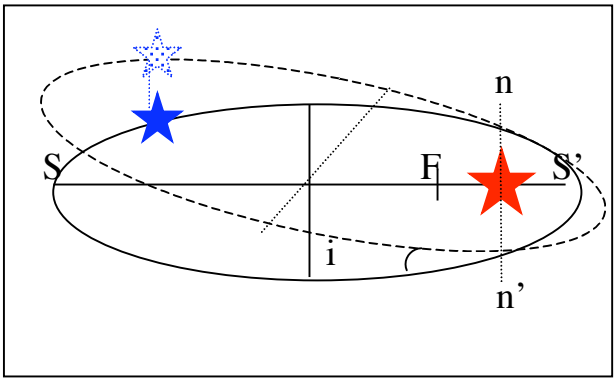
3 – L'étoile principale est sur le grand axe de l'ellipse apparente : au foyer.



Comme elle est aussi au foyer de l'ellipse vraie, les deux orbites ont la même excentricité. Elles sont donc semblables et confondues.

L'étoile double est vue de face.

SS' = 2a



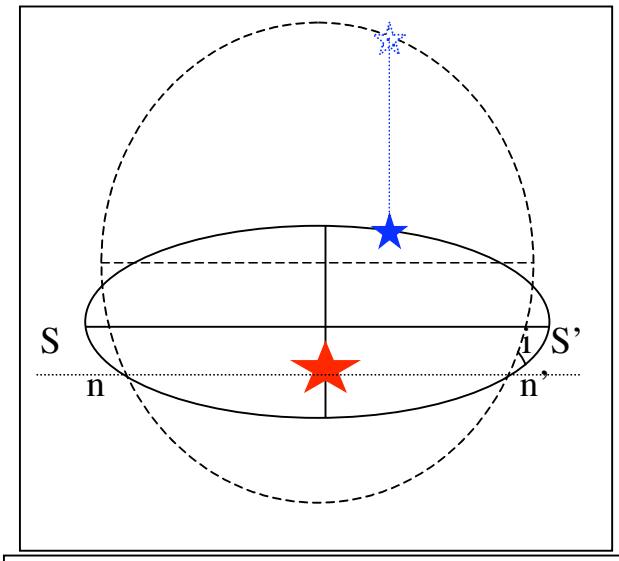
Si l'étoile principale n'est pas en F mais se rapproche de S' en restant sur l'axe SS', alors l'ellipse vraie aura une excentricité plus grande que l'ellipse apparente.

Le grand axe SS' est la projection du grand axe de l'ellipse vraie.

Les petits axes des deux ellipses gardent la même dimension.

La ligne des noeuds nn' est parallèle au petit axe de l'ellipse apparente.

4- L'étoile principale est sur le petit axe de l'ellipse apparente.



En ce cas, le petit axe de l'ellipse apparente est la projection du grand axe de l'ellipse vraie.

Le petit axe de l'ellipse vraie a la dimension du grand axe SS' de l'ellipse apparente.

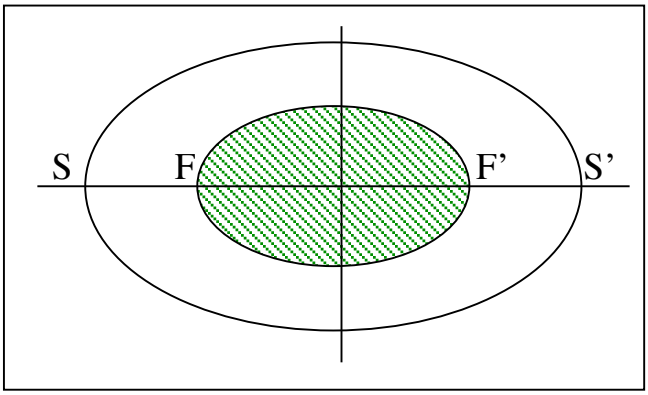
La ligne des noeuds nn' est perpendiculaire au petit axe de l'orbite apparente.

Ces considérations suffisent à relever l'orbite, c'est-à-dire à trouver les dimensions et la position de l'orbite vraie par rapport à l'orbite apparente.

Dans ces trois cas particuliers, on peut se dispenser de l'usage des formules générales que nous allons établir maintenant.

°°°°°°°°°

Comparaison des excentricités : de l'orbite apparente et de l'orbite vraie.



Soit SS' le grand axe de l'orbite apparente, et FF' ses foyers.

Si l'on trace l'ellipse semblable de grand axe FF', concentrique à l'orbite apparente, on forme trois lieux géométriques :

1 - La petite ellipse : si l'étoile principale se trouve à l'intérieur, l'ellipse vraie a une excentricité plus petite que celle de l'ellipse apparente.

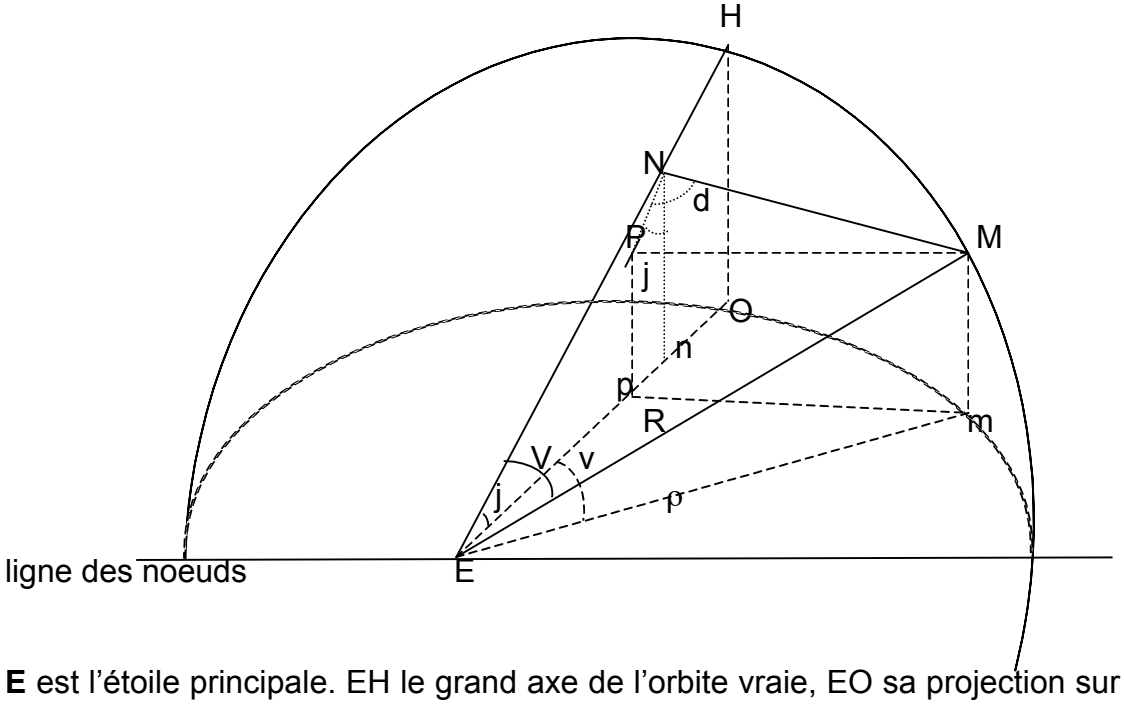
2 – Si l'étoile principale se trouve sur la circonférence de cette petite ellipse, l'ellipse vraie a la même excentricité que celle de l'ellipse apparente.

3 - Si l'étoile principale se trouve entre la petite ellipse et la grande, l'ellipse vraie a une excentricité plus grande que celle de l'ellipse apparente.

Cas général des formules de transition

Nous établissons ces formules de deux manières différentes, la première par rapport aux axes, c'est-à-dire au grand axe de l'orbite vraie et sa projection sur l'orbite apparente ; la seconde par rapport à la ligne des noeuds, formules classiques de Campbell.

1 – Par rapport au grand axe de l'orbite vraie (dont on connaît la projection)



E est l'étoile principale. EH le grand axe de l'orbite vraie, EO sa projection sur le plan de l'orbite apparente.

M est la position du compagnon sur l'orbite vraie ; **m** sa projection sur l'orbite apparente. Nous cherchons les coordonnées de **M** par rapport au grand axe.

Appelons **R** la droite EM qui rejoint les deux étoiles dans l'ellipse vraie: et l'angle $H\hat{E}M$ = V (coordonnées vraies).

Em = ρ , et l'angle $O\hat{E}m$ = v (coordonnées mesurables sur l'orbite apparente).

P est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur le plan EOH qui est perpendiculaire au plan de l'orbite apparente. ßprojection de P sur EO.

N pied de la perpendiculaire abaissée de M sur le grand axe EH, **n** projection de N sur la droite EO.

Appelons **j** l'angle formé par le grand axe EH et sa projection EO.

Cet angle j se retrouve en PNn (côtés perpendiculaires).

Le quadrilatère MPpm est un rectangle dont le plan est perpendiculaire à celui de l'orbite apparente. Le rayon R a pour projection ρ, l'angle V a pour projection v.

Appelons **d** l'angle $P\hat{N}M$ qui n'est autre que le dièdre des plans ENM et EOH, et nous appellerons cet angle la « déclivité ».

De ces dispositions, il découle immédiatement, puisque PM = pm :

pm = PM = NM.sind ; or NM = R.sinV ; et pm = ρ.sinv, donc ρ.sinv = R.sinV.sind

d'où **R** = ρ.sinv / sinV.sind

D'autre part : EN = R.cosV ; donc En = R.cosV.cosj

En valeur algébrique $|Ep| = |En| + |np|$, ou Ep = En +/- np

Comme Ep = ρ.cosv ; En = R.cosV.cosj (ci-dessus);

et que np = NPsinj ; or NP = NM.cosd = R.sinV.cosd ; donc np = R.sinV.cosd.sinj

il vient : ρ.cosv = R.cosV.cosj +/- R.sinV.cosd.sinj

Remplaçons ρ par sa valeur ci-dessus : ρ = pm / sinv = R.sinV.sind / sinv

puis divisons par R et par sinV.sind.

Il vient : cotan.v = cotanV.cosj / sind +/- cotand.sinj,

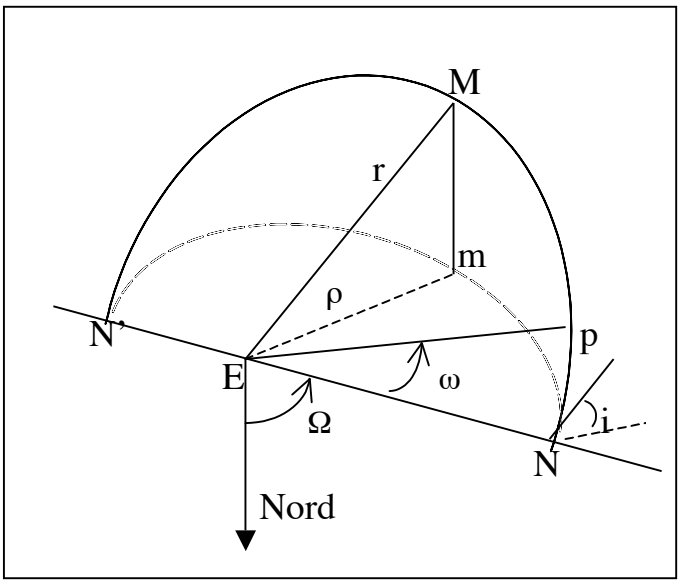
d'où cotanV = (cotanv -/+ cotand.sinj) sind / cosj d'où l'angle **V**

°°°°°°°°°°°°°

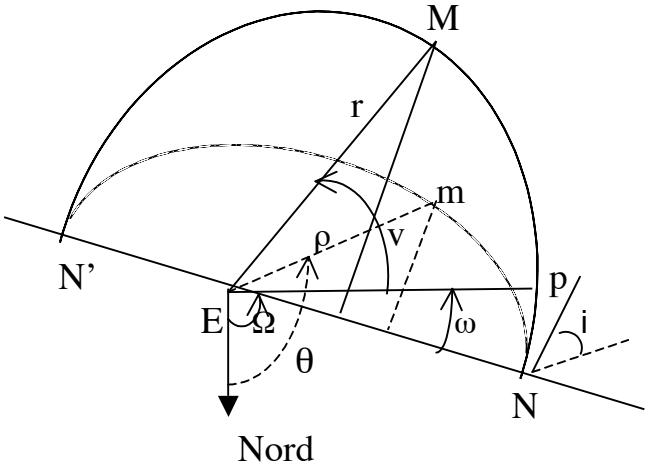
2- Par rapport aux éléments de Campbell

Ces éléments dits « de Campbell » (astronome américain) sont les éléments orbitaux que l'on détermine à partir de l'observation de l'orbite apparente :

Soit **E** l'étoile principale ; **M** la secondaire et sa projection en **m** sur l'orbite apparente.



1- P : période en année, temps que met l'étoile secondaire à parcourir son orbite.
2- i : inclinaison des deux plans de l'orbite apparente sur l'orbite vraie.
3- a : demi grand axe de l'orbite vraie
4- T : date du passage de l'étoile secondaire au périastre p, en année.
5- e : excentricité de l'orbite vraie.
6- Ω : angle que fait la direction du Nord avec la ligne des noeuds N'N.
7- ω : angle que fait la ligne des noeuds avec le périastre de l'orbite vraie. On appelle cet angle « l'argument du périastre ».



EM = r ; Em = ρ ; appelons v l'angle allant du périastre p à M.

Projetons les points M et m sur la ligne des noeuds N'N. Il vient :

(1) $r.\cos(\omega+v) = \rho.\cos(\theta-\Omega)$

(2) $r.\sin(\omega+v).\cos i = \rho.\sin(\theta-\Omega)$

d'où r

en divisant membre à membre (2) / (1), on obtient : $\tan(\omega+v).\cos i = \tan(\theta-\Omega)$ d'où v

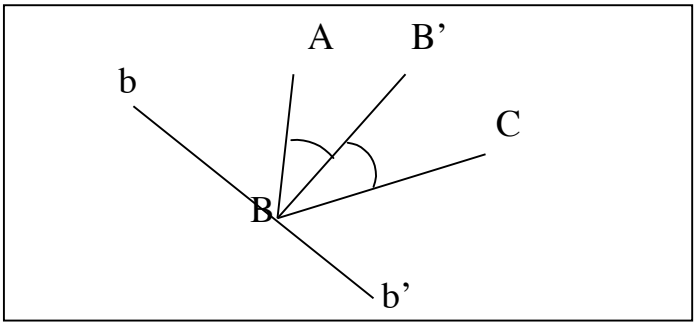
L'application de ces formules suppose que l'on connaisse l'orientation de la ligne des noeuds par rapport au Nord (Ω), l'angle des plans (i), et l'argument du périastre (ω). ρ et θ sont toujours connus par la mesure.

Les chercheurs ont recours à des moyens approximatifs pour la détermination de ces valeurs (sauf pour la direction de la ligne des noeuds).

Nous verrons que la méthode exposée au chapitre suivant aboutit à une détermination rigoureuse de tous les éléments nécessaires, ceux de Campbell ici définis, et ceux précédemment définis (par rapport au grand axe)

°°°°°°°°°°°°°

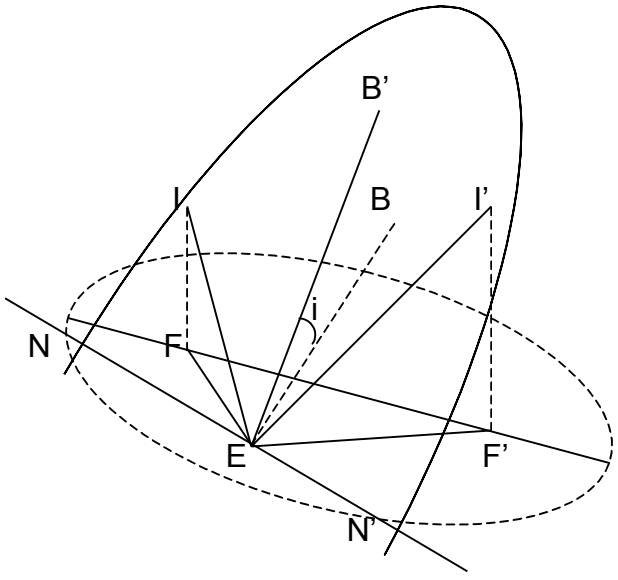
Direction de la ligne des noeuds



Rappelons que la bissectrice extérieure (bb') d'un angle ($A\hat{B}C$) est la droite perpendiculaire à la bissectrice intérieure (BB'), droite élevée à partir de l'angle.

Théorème de Mlodziejowski *: « La ligne des noeuds est la bissectrice extérieure de l'angle ayant pour sommet l'étoile principale E, et pour côtés EF et EF'* » (F et F' foyer de l'orbite apparente). (figure ci-dessous)

Les perpendiculaires au plan de l'orbite apparente élevées en F' et F rencontrent en I' et I le plan de l'orbite vraie. La bissectrice de $F\hat{E}F'$ se projette en bissectrice de $I\hat{E}I'$, et toutes deux forment l'angle du dièdre i qui a pour arête la bissectrice extérieure, c'est-à-dire la même ligne des noeuds NN'.



Il est donc très aisé de tracer la ligne des noeuds des deux ellipses sur l'orbite apparente.

°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°

N.B. Lorsque l'étoile E se trouve vers les extrémités de l'ellipse, l'un des angles en F ou F' du triangle EFF' est obtus, il faudra donc dans l'expression de la tangente, (p.16) prendre le supplémentaire, sinon on aboutit à une ellipse vraie plus petite que l'ellipse apparente.

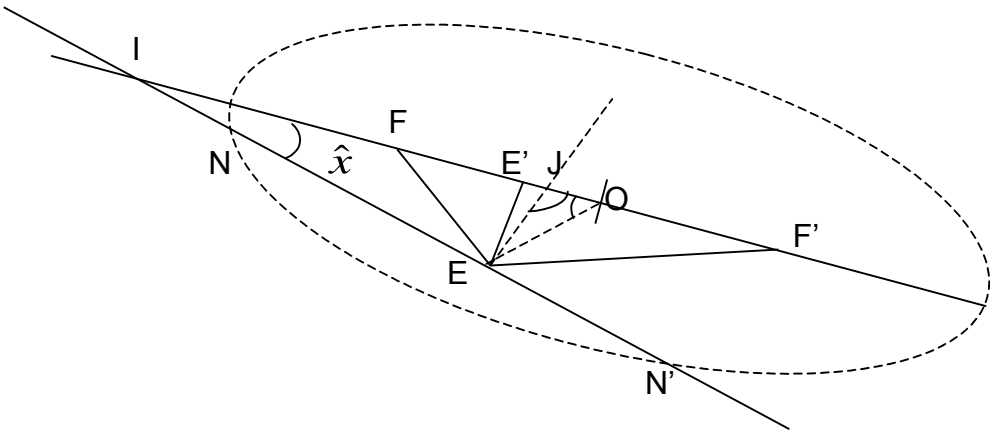
<u>Chapitre 3</u> – Le relèvement de l'orbite

Comment connaître en grandeur et en position l'orbite vraie, dans l'espace, à partir de l'observation de l'orbite apparente ? La solution de ce problème difficile est donnée dans ce chapitre. Elle s'appuie sur la détermination de 4 paramètres : 2 qui précisent la grandeur de l'ellipse apparente ; 2 qui précisent la position de E par rapport à O centre de cette ellipse.

L'étude complète de cette question comprend 6 parties :

1- détermination exacte de la direction de la ligne des noeuds dans le plan de l'orbite apparente, par rapport au grand axe de cette orbite : angle « $\hat{x}$ ».
2- détermination exacte de la projection du paramètre de l'orbite vraie sur l'orbite apparente par rapport au grand axe de l'ellipse apparente : angle « $\hat{y}$ ».
3- résolution du triangle OEG : O = centre de l'orbite apparente ; E = étoile principale, G = intersection de la ligne des noeuds avec la parallèle à la projection du paramètre passant par le centre O.
4- détermination de la longueur OH, H = centre de l'orbite vraie.
5- détermination de l'ellipse vraie en grandeur et position, par rapport à l'ellipse apparente.
6- détermination des 3 paramètres qui précisent la position de l'orbite vraie : « $\hat{i}$ », « $\hat{j}$ », et « $\hat{d}$ ».

<u>1-Direction de la ligne des noeuds</u>. Reprenons la figure de la page 15, mais sans représenter l'orbite vraie.



Nous avons tracé la ligne des noeuds NN' à partir de la bissectrice intérieure de l'angle $F\hat{E}F'$. Appelons « $\hat{x}$ » l'angle que cette ligne forme avec le grand axe de l'orbite apparente, et I le point d'intersection. O est le centre de l'orbite apparente. Tirons OE : OE est mesurable, ainsi que « $\hat{k}$ » angle entre le grand axe et OE, compté de 0 à 360°.
Nous avons vu au 1er chapitre que : F'F = 2ae
Abaissons de E en E' la perpendiculaire sur FF'. Il vient :

EE' = OE.sin $\hat{k}$ = β et OE' = OE.cos $\hat{k}$ = α

Considérons maintenant les deux angles $\hat{F}$ et $\hat{F}'$ du triangle FEF' :

tan $\hat{F}$ = EE' / FE' = β / (ae – α) ; tan $\hat{F}'$ = EE' / F'E' = β / (ae + α)

Soient J et I l'intersection des bissectrices intérieures et extérieures avec la droite FF'
JEI est rectangle en E ; l'angle $\hat{j} = E\hat{J}F'$, extérieur au triangle JEI, vaut : $\hat{j}$ =90° + $|\hat{x}|$. (1)

Ce même angle $\hat{j}$ est extérieur à ce triangle EJF, et vaut : $\hat{j} = \hat{E}/2 + \hat{F}$ (2)
D'autre part l'angle $\hat{E}$ du triangle FEF' est le supplément de la somme des deux autres :

$\hat{E} = 180° - (\hat{F} + \hat{F}')$; donc $(\hat{E}/2) = 90° - (\hat{F} + \hat{F}')/2$
Remplaçons $(\hat{E}/2)$ par cette valeur dans l'équation (2) : $\hat{j} = 90° - (\hat{F} + \hat{F}')/2 + \hat{F}$ (3)

Rapprochons les valeurs de $\hat{j}$ en (1) et (3), il vient : $|\hat{x}| = \hat{F} - (\hat{F} + \hat{F}')/2$

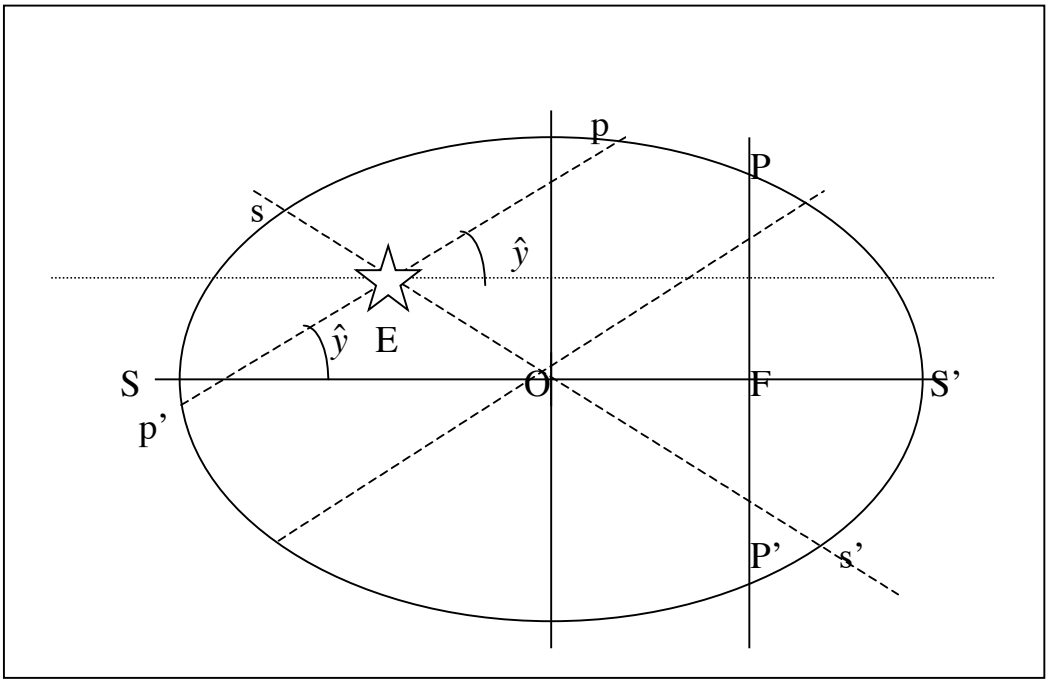
D'où $\boxed{\hat{x} = (\hat{F} + \hat{F}')/2 \text{ , ou } \hat{x} = (\hat{F}' - \hat{F})/2}$

L'angle du grand axe de l'ellipse apparente et de la ligne des noeuds est la demi-différence des angles à la base du triangle ayant pour sommet l'étoile principale E et pour base l'écartement des foyers FF'.

Il faut tenir compte de la valeur algébrique de x pour l'introduire dans le calcul.

°°°°°°°°°°°°

2- <u>Détermination de la direction de la projection du paramètre</u> : angle « $\hat{y}$ »



Rappelons que le « paramètre » est la corde PP' de l'ellipse passant par le foyer F et perpendiculaire au grand axe SS'; elle sera donc parallèle au petit axe. Cette corde rencontre l'ellipse en deux points équidistants du foyer :
FP = FP'
Il en résulte que la projection du paramètre pp' de l'ellipse vraie est elle-même divisée en segments égaux par l'ellipse apparente : Ep = Ep'. C'est sur cette propriété que l'on s'appuie pour déterminer au compas la projection du paramètre. Nous nous proposons de calculer d'une manière rigoureuse l'angle $\hat{y}$ que fait cette projection avec le grand axe de l'orbite apparente.

Nous écrivons d'abord l'équation de l'ellipse : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ (définie p.5), (rappelons que a et b sont les demi grand et petit axes de l'orbite),

Rapportons cette équation au foyer E de l'ellipse vraie. Les coordonnées de E sont α et β définies à la page 16 précédente, tel que : α = OE.cos $\hat{k}$ et β = OE.sin $\hat{k}$;

Pour l'équation de cette ellipse, nous aurons donc X = x + α et Y = y + β : nouvelles coordonnées. Il vient :

$$\frac{(x+\alpha)^2}{a^a} + \frac{(y+\beta)^2}{b^2} = 1$$

Ecrivons maintenant l'équation d'une droite passant par E, nouveau centre des coordonnées (x et y) , et tournant autour de E suivant le coefficient angulaire « m ».

Soit y = mx. Remplaçons y par cette valeur dans l'équation de l'ellipse.

$$\frac{(x+\alpha)^2}{a^a} + \frac{(mx+\beta)^2}{b^2} = 1$$

En ordonnant cette équation par rapport aux puissances décroissantes de x, j'obtiens une équation de la forme $Ax^2+2Bx+C = 0$, ci-dessous :

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 + 2\left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{m\beta}{b^2}\right)x + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) - 1 = 0$$

Pour déterminer deux cordes égales à partir de E, il suffit d'écrire que cette expression a deux racines égales, c'est-à-dire que –B/A = 0

$$-B/A = -\left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{m\beta}{b^2}\right) / \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = 0$$

Je réduis au même dénominateur haut et bas, et je simplifie. Il vient :

$(\alpha b^2 + ma^2\beta) / (b^2 + m^2a^2) = 0$ Le dénominateur est toujours positif. Pour que cette fraction soit nulle, il suffit que le numérateur le soit, c'est-à-dire que l'on ait : $m = -\alpha b^2 / a^2\beta$, condition qui nous fournit la valeur de m, coefficient angulaire cherché.

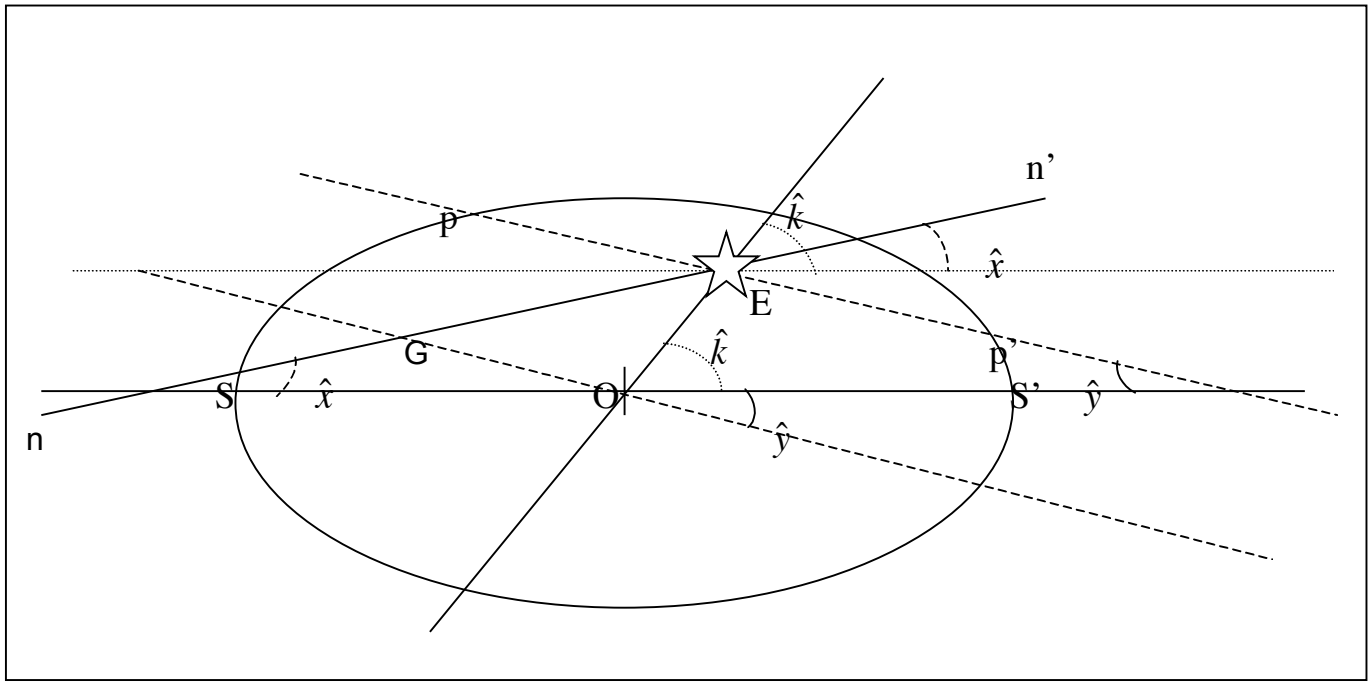
Nous considérons ce coefficient angulaire m comme étant la tangente de l'angle $\hat{y}$ défini plus haut ; l'angle $\hat{y}$ sera l'arc-tangente de cette valeur.

$\hat{y}$ = arctan.m

On voit donc qu'il suffit de mesurer OE et l'angle $\hat{k}$ pour obtenir l'angle $\hat{y}$ à partir des axes a et b de l'ellipse apparente. On voit en outre qu'en raison du signe – lorsque a et b sont de même signe, l'angle $\hat{y}$ est négatif. Il faudra tenir compte de cette propriété pour résoudre sans erreur le triangle EOG ci-dessous, comme nous allons le faire maintenant.

°°°°°°°°°°°°

3 – **Résolution du triangle OEG**



Considérons la ligne des noeuds nn' passant par E suivant l'angle $\hat{x}$ avec le grand axe SS'; et la projection du paramètre pp' passant aussi par E suivant l'angle $\hat{y}$ avec le grand axe, angles calculés précédemment.

La parallèle à la projection du paramètre, passant par O rencontre la ligne des noeuds en G, d'où le triangle OEG.

Appelons $\hat{E}$, $\hat{O}$ et $\hat{G}$ les angles intérieurs du triangle OEG. Les angles $\hat{x}$ et $\hat{y}$ peuvent sortir négativement ou positivement des calculs, suivant le quadrant de l'ellipse dans lequel on se trouve.

$\hat{E} = \hat{k} + |\hat{x}|$; $\hat{O} = 180° - (\hat{k} + |\hat{y}|)$; $\hat{G} = \hat{x} + |\hat{y}|$

Il importe de vérifier que la somme de ces trois angles reste toujours égale à 180°. En outre, il est facile de montrer que la somme $\hat{x} + \hat{y}$ est toujours inférieure à 90°, en valeur absolue, en raison des positions relatives de la ligne des noeuds et de la projection du paramètre, quel que soit le quadrant où se trouve E. Il en résulte que l'angle $\hat{O}$ est toujours obtus, en valeur absolue.

°°°°°°°°°°°°°

C'est la connaissance de la grandeur OG qui nous intéresse pour le relèvement de l'orbite. Nous pouvons connaître cette grandeur aisément en écrivant dans le triangle OEG la relation trigonométrique bien connue :

OG / sin $\hat{E}$ = OE / sin $\hat{G}$, d'où l'on tire OG = OE sin $\hat{E}$ / sin $\hat{G}$

OG = OE sin ($\hat{k} + |\hat{x}|$) / sin ($\hat{x} + |\hat{y}|$)

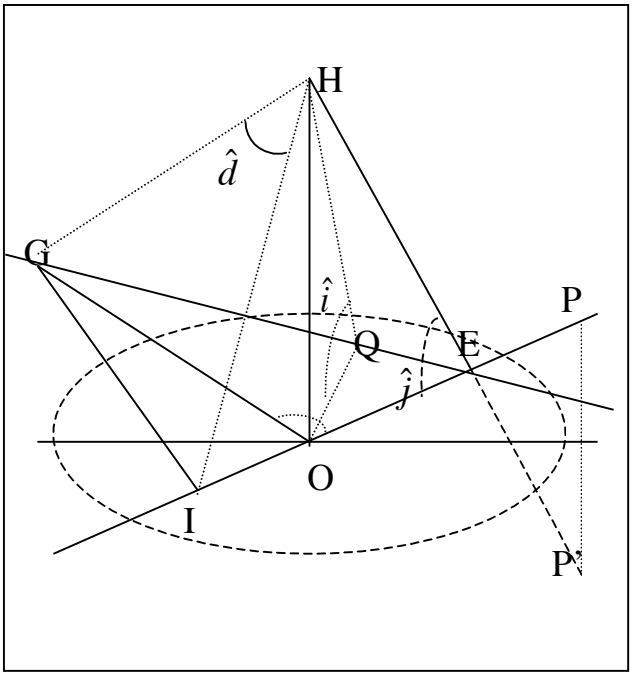
Notons : Lorsque $\hat{k}$ grandit de 0° à 360°, **E** passe successivement des quadrants 1 à 4 de l'ellipse. Lorsqu'il passe sur les axes, le point G est rejeté à l'infini : il n'y a plus de triangle OEG, mais nous avons vu que dans les cas particuliers, le relèvement de l'ellipse se fait instantanément, sans user de formules difficiles. Dans ce cas $\hat{x}$ = $\hat{y}$, la ligne des noeuds se confond avec le paramètre si E est sur le petit axe ; ou alors, $\hat{x}$ = 0 et $\hat{y}$ = 90°, si E est sur le grand axe.

Ce qu'il importe de remarquer ici, c'est que pour une position de E sur l'orbite apparente, déterminée par OE et l'angle $\hat{k}$, correspond une seule ellipse vraie dont la grandeur et la position est entièrement déterminée par OE et $\hat{k}$ (compte tenu évidemment de la connaissance de a et de b)

Notons également que le petit axe de l'orbite vraie se projette sur le segment OG, donc que l'angle $\hat{O}$ est la projection de l'angle droit du petit axe et du grand axe de l'orbite vraie. Cette considération nous aidera à mieux comprendre la suite du raisonnement.

°°°°°°°°°°°°

4- **Détermination de OH**



Nous appelons H le centre de l'orbite vraie, qui se situe sur la perpendiculaire au plan de l'orbite apparente, élevée au centre O.

Considérons le triangle OEG comme précédemment. Nous en avons les angles et le segment OG calculé en fonction de $\hat{k}$, OE, $\hat{x}$ et $\hat{y}$, mesurés ou calculés.

La ligne des noeuds est EG, le plan de l'orbite vraie est EGH ; abaissons dans le plan de l'orbite apparente la perpendiculaire depuis G sur la droite OE. Appelons I le point d'intersection - à l'extérieur du triangle OEG, puisque l'angle $\hat{O}$ est toujours supérieur à 90°. Joignons HI.
EH est un segment du grand axe de l'orbite vraie, puisqu'il passe par l'étoile E et le centre H.

Nous avons OH perpendiculaire au plan de l'orbite apparente, donc à IG droite de ce plan ; et GI perpendiculaire à IE, donc au plan IHE et à EH droite de ce plan.

D'autre part, OG parallèle à la projection du paramètre, passant par O, est la projection du petit axe (et de son prolongement). OG est aussi la projection de HG, donc HG porte le petit axe, et l'angle $E\hat{H}G$ est droit.

Nous avons donc EH perpendiculaire à GI et à GH, donc à toute droite du plan IGH, donc à IH droite de ce plan. Il en résulte que l'angle $I\hat{H}E$ est droit, rectangle en H. Autrement dit, si l'on imagine que OE et H sont fixes, et que l'on fait tourner le plan de l'orbite vraie autour de son grand axe EH, le lieu du petit axe est le plan HGI, perpendiculaire à EH

Nous pouvons donc écrire : dans le triangle EHI, OH étant la hauteur :

$OH^2 = OE.OI$ (relation métrique dans le triangle rectangle) ; $OI = OG.\cos\hat{O}$, donc

$OH^2 = OE.OG.\cos\hat{O}$

$\hat{O}$ étant obtus, son cosinus est négatif. Il conviendra donc dans le calcul de OH de prendre la valeur absolue du produit du second membre ($OE.OG.\cos\hat{O}$), de manière à extraire la racine carrée. Ensuite, l'extraction de la racine carrée offre une ambiguïté ; en choisissant la racine positive, on situe le centre de l'orbite vraie au-dessus du plan de l'orbite apparente. Ce qui confirme le principe que l'on ne peut préciser l'orbite vraie qu'à une symétrie près.

°°°°°

On peut également déterminer l'angle $\hat{j}$ en considérant les deux triangles rectangles semblables EOH et EIH ; dans le premier on peut écrire :

$\cos\hat{j}$ = EO / EH, et dans le second : $\cos\hat{j}$ = EH / EI ; d'où, en multipliant l'un par l'autre : $\cos^2\hat{j}$ = EO / EI

EI = EO+OI et $OI = OG.\cos\hat{O}$; d'où $\cos^2\hat{j} = EO / EO + OG.\cos\hat{O}$,

ceci en prenant la valeur absolue de ($OG.\cos\hat{O}$), puisque que $\hat{O}$ est obtus. Nous retrouvons la même ambiguïté que pour l'estimation de OH : l'ellipse vraie est située par rapport à l'orbite apparente à une symétrie près.

°°°°°°°°°°

5- **<u>Détermination de l'orbite vraie en grandeur et en position</u>,** par rapport à l'ellipse apparente.

Appelons A et B les demi grand axe et petit axe de l'orbite vraie, et Ex son excentricité (réservant les minuscules à l'orbite apparente) [1]. (A = OP' sur la figure, P' figure le périastre de l'orbite vraie)

La détermination de l'excentricité de l'orbite vraie se fait par le rapport OE / OP , mesuré ou calculé sur l'orbite apparente.

En fait, une fois que l'on a affiné l'ellipse apparente (comme nous le verrons plus loin), on obtient un meilleur résultat en calculant OP. Pour cela, il suffit d'écrire l'équation centrale de l'ellipse apparente, (cf. p.5), et de faire dans cette équation $\hat{f} = \hat{k}$

Nous aurons : $OP^2 = \dfrac{b^2}{(1 - e^2\cos^2\hat{k})}$; d'où OP ;

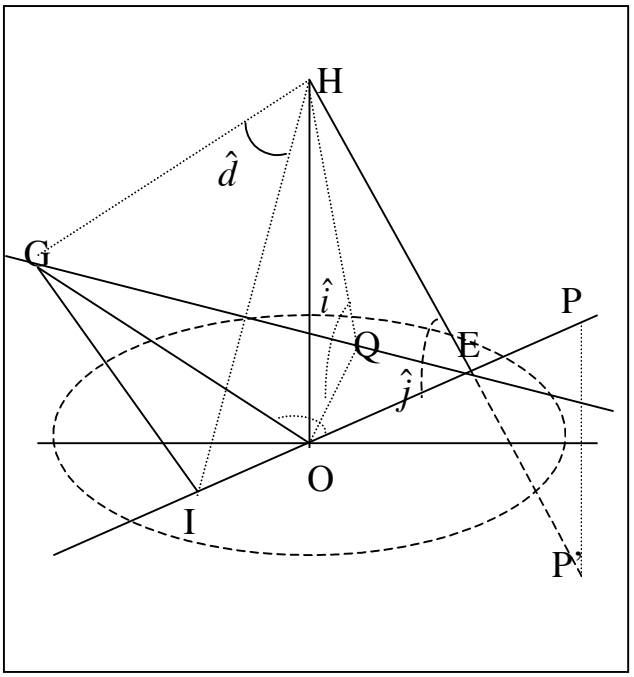
[1] - Le lecteur attentif ne sera pas trompé car lorsque nous passerons aux éléments de Campbell nous reprendrons les conventions classiques conformes aux manuels. Mais pour le cours de notre étude, il est pratique de réserver les majuscules à l'orbite vraie et les minuscules à l'apparente.

comme A = OP' = OP.cos $\hat{j}$, on obtient ainsi le demi grand axe de l'orbite vraie.
B, demi petit axe de l'orbite vraie, s'obtient par la relation algébrique qui lie les axes à l'excentricité :

$B^2 = A^2.(1-Ex^2)$

°°°°°°°°°°°

6-**<u>Détermination des paramètres fixant la position de l'orbite vraie,</u>** par rapport à l'orbite apparente : **« $\hat{i}$ », « $\hat{j}$ », et « $\hat{d}$ ».**



Reprenons la figure de la page 20.

1- <u>L'angle « $\hat{j}$ »</u> : angle du grand axe de l'orbite vraie avec sa projection sur la plan de l'orbite apparente, soit entre EH et EO. Nous avons :

tan $\hat{j}$ = OH / OE , d'où $\hat{j}$ par l'arc-tangente

2-<u>L'angle « $\hat{i}$ »</u> : comme dans les éléments de Campbell, angle du dièdre des deux plans. Abaissons de H la perpendiculaire sur la ligne des noeuds. Soit Q le pied de cette perpendiculaire. L'angle $\hat{i}$ est formé par OQ et QH. Nous aurons donc :

tan $\hat{i}$ = OH / OQ ; or OH = OE.tan $\hat{j}$ (ci-dessus) et OQ = OE.sin $\hat{E}$; nous aurons :

tan $\hat{i}$ = OE.tan $\hat{j}$ / OE.sin $\hat{E}$; tan $\hat{i}$ = tan $\hat{j}$ / sin $\hat{E}$ d'où $\hat{i}$

3-<u>L'angle « $\hat{d}$ »</u> : que nous appelons la « déclivité » , c'est-à-dire le dièdre du plan de l'orbite vraie (EGH) avec le plan contenant le grand axe de l'orbite vraie et sa projection (EIH). Ce dièdre est mesuré par l'angle $I\hat{H}G$; puisque EH est perpendiculaire à HG et à HI, nous avons :

tan $\hat{d}$ = IG / IH ; or IG = OG.sin $\hat{O}$, et IH = OH / cos $\hat{j}$ (puisque l'angle $\hat{j}$ se retrouve en $I\hat{H}O$ - triangles semblables, rectangles en O), d'où :

tan $\hat{d}$ = OG.sin $\hat{O}$. cos $\hat{j}$ / OH d'où $\hat{d}$

°°°°°°°°°°

Chapitre 4 - Relèvement de l'orbite par la règle et le compas

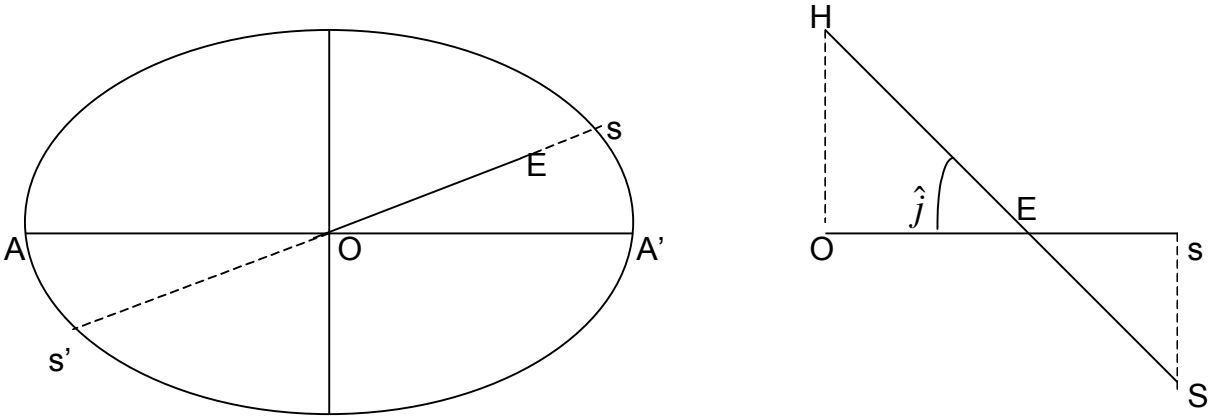
Le passage de l'orbite apparente à l'orbite vraie est indispensable pour effectuer le calcul des éphémérides d'une étoile double.

Ce chapitre 4 donne une application pratique – avec la règle et le compas – de la procédure à suivre pour « relever » sur le papier l'orbite apparente, sujet du chapitre précédent.

Reprenons les différentes étapes, pas à pas:

Sur l'ellipse apparente de centre O, où l'étoile principale E est en un point quelconque [2] - ellipse dessinée le mieux possible à partir des données de l'observation, les axes et les foyers étant situés avec grande précision – il convient de tracer :

1- Le segment OE, et son prolongement jusqu'en s et s' (p.17). ss' est la projection du grand axe SS' de l'orbite vraie. Le rapport OE / Os = e, donne immédiatement l'excentricité de l'orbite vraie. Je mesure donc sur le papier OE et Os.



H centre de l'orbite vraie
HS demi grand axe de l'orbite vraie
L'angle $\hat{j}$ reste indéterminé tant que l'on ne connaît pas OH

OE / Os = HE / HS = e

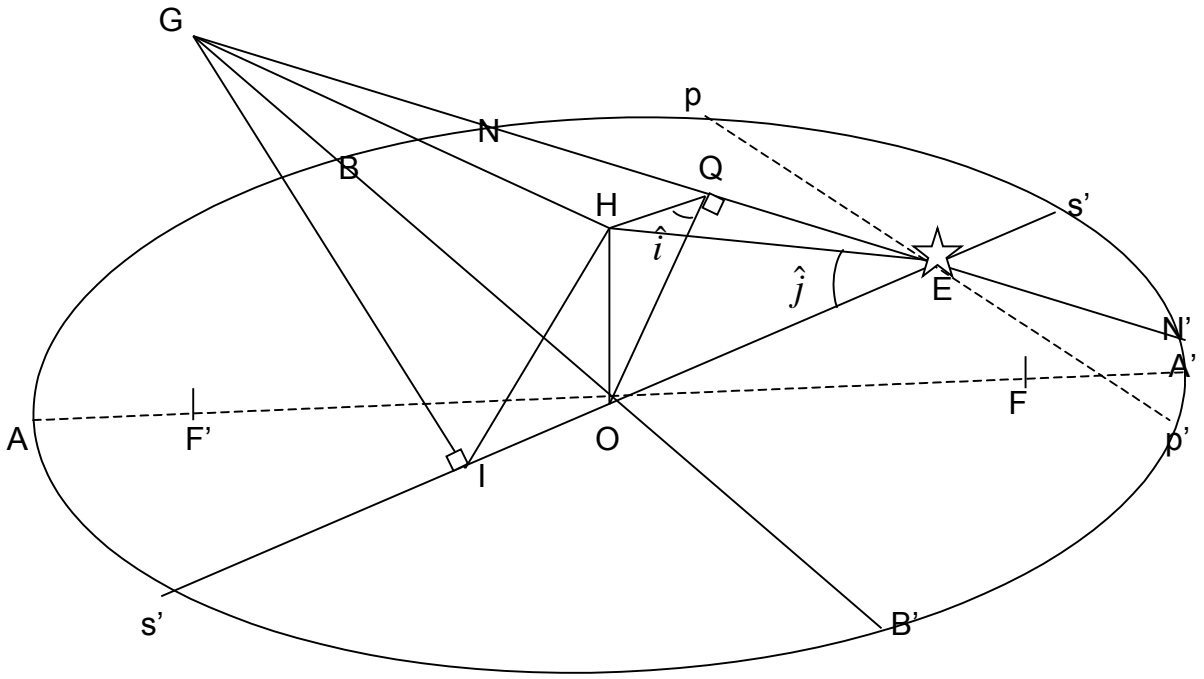
2- La ligne des noeuds **NN'**, par le théorème de Mlodziejowski, (voyez p.15). Fig. suivante.
3- La projection du paramètre **pp'** et celle du petit axe de l'ellipse vraie passant par O (p.17)
4- Le point G, intersection de la ligne des noeuds et de la projection du petit axe BB'.
5- De ce point G, on abaisse dans le plan de l'ellipse apparente la perpendiculaire à la droite ss'. Soit I son pied. Je mesure sur le papier OI.

Comme OH^2 = OI.OE, je peux connaître la valeur de **OH**, et la valeur de l'angle $\hat{j}$ du fait que OH / OE = tan $\hat{j}$. Et je peux dessiner le triangle IHE, perpendiculaire au plan de l'orbite apparente (fig.ci-dessous).

6- Connaissant $\hat{j}$ je peux connaître le demi grand axe HS = **a** de l'orbite vraie :

a = Os / cos $\hat{j}$ d'où le demi petit axe : **b** = a. $\sqrt{(1-e^2)}$

[2] - Dans les cas particuliers, le relèvement est très facile, nous l'avons vu.



6- <u>Reste à connaître l'angle $\hat{i}$</u> de l'inclinaison des deux orbites :
Abaissons depuis le centre O de l'orbite apparente la perpendiculaire sur la ligne des noeuds NN'. Soit Q le pied de cette perpendiculaire. Mesurons sur le papier OQ.

OH / OQ = tan $\hat{i}$, d'où l'angle $\hat{i}$.

Le triangle EHG est dans le plan de l'orbite vraie.

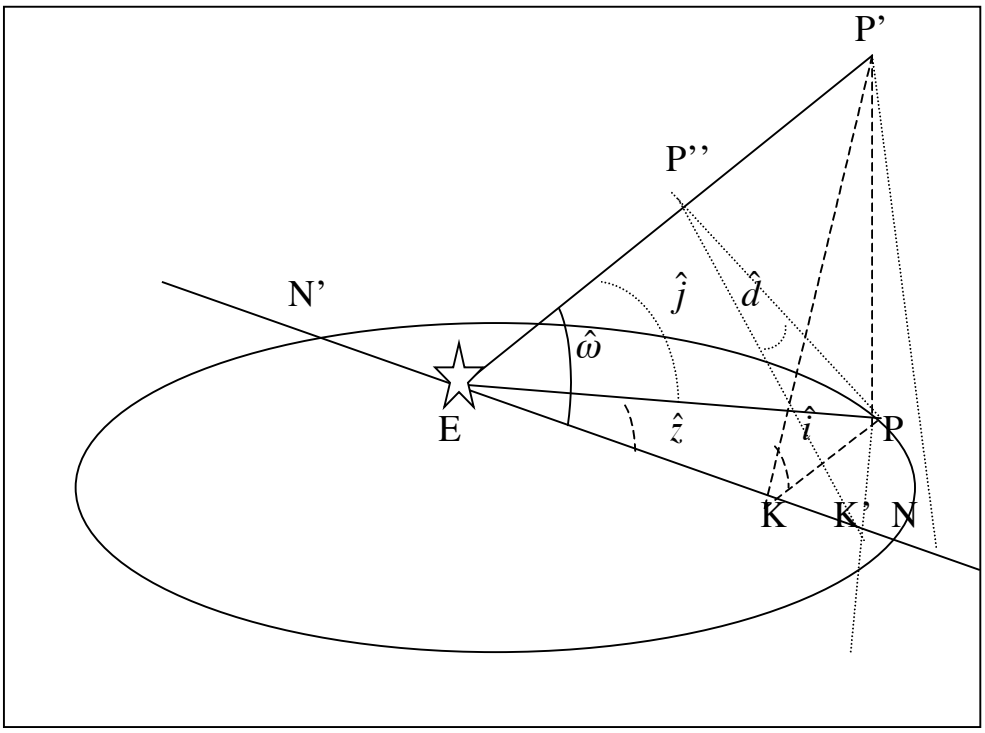
A partir de là, tous les éléments de l'orbite vraie sont connus en fonction de la précision avec laquelle on a déterminé l'orbite apparente.

N.B. Nous avons supposé que H est au-dessus du plan de l'orbite apparente, mais on peut le situer au-dessous, ce qui montre que l'orbite vraie n'est relevée qu'à une symétrie près, comme le montre aussi l'ambiguïté du signe lorsque l'on extrait la racine carrée de OH^2.

Cette observation est importante, lorsque l'on utilise cette méthode dans un programme de calcul. De même, il sera important dans un tel programme de tenir compte des fonctions trigonométriques inverses selon la position de l'étoile E dans l'orbite apparente.

°°°°°°°°°°°

Chapitre 5 : Etablissement des paramètres directeurs, à partir des éléments de Campbell



Considérons la figure ci-contre : EN est la ligne des noeuds sur l'orbite apparente représentée, P étant la projection du périastre de l'orbite vraie. EP'N, plan de l'orbite vraie. L'angle $N\hat{E}P'$ est $\hat{\omega}$, l'argument du périastre. L'angle $N\hat{E}P$ est la projection de $\hat{\omega}$ sur le plan de l'orbite apparente, que nous appelons $\hat{z}$; et enfin l'angle $P'\hat{E}P$ est l'angle $\hat{j}$ défini précédemment. P' peut être au-dessous de l'orbite apparente, mais le raisonnement reste le même. Nous raisonnons ici sur les angles comptés positivement dans le premier quadrant.

Abaissons de P la perpendiculaire sur EN ; soit K son pied. Puisque PP' est perpendiculaire au plan de l'orbite apparente, elle est perpendiculaire à toute droite de ce plan, donc à EN ; d'où PP' perpendiculaire à KP. L'angle $P\hat{K}P'$ est le dièdre défini par l'angle $\hat{i}$ de Campbell.

1- Relation des cosinus : nous avons EK = EP'.cos $\hat{\omega}$; mais aussi EK = EP.cos $\hat{z}$; or EP = EP'.cos $\hat{j}$; d'où la relation :

$$\cos\hat{\omega} = \cos\hat{z}.\cos\hat{j} \quad (1)$$

2- Relation des sinus : nous avons de même PP' = EP'.sin $\hat{j}$; mais aussi PP' = KP'.sin $\hat{i}$; or KP' = EP'.sin $\hat{\omega}$; d'où la relation :

$$\sin\hat{j} = \sin\hat{\omega}.\sin\hat{i} \quad (2)$$

3- Relation des tangentes : nous avons aussi KP = EK.tan $\hat{z}$; mais aussi KP = KP'.cos $\hat{i}$; or KP' = EK.tan $\hat{\omega}$, d'où la relation :

$$\tan\hat{z} = \tan\hat{\omega}.\cos\hat{i} \quad (3)$$

Faisons maintenant apparaître l'angle $\hat{d}$ de la déclivité du dièdre formé entre le plan EPP' ($\perp$ au plan de l'orbite apparente), et le plan de l'orbite vraie ENP'. Elevons en P la perpendiculaire au plan EPP' : elle vient rencontrer la ligne des noeuds en K', puis de P, abaissons en P'' la perpendiculaire à EP'. K'P'' est aussi perpendiculaire à EP', en raison du théorème des 3 perpendiculaires.

Nous aurons alors :

tan $\hat{d}$ = K'P / P''P ; or K'P = EP.tan $\hat{z}$ et P''P = EP.sin $\hat{j}$; d'où $\boxed{\tan \hat{d} = \tan \hat{z} / \sin \hat{j}}$ (4)

Nous pouvons écrire aussi : sin $\hat{d}$ = PK' / P''K' ; or PK' = EK'.sin $\hat{z}$, et P''K' = EK'.sin $\hat{\omega}$, d'où la relation :

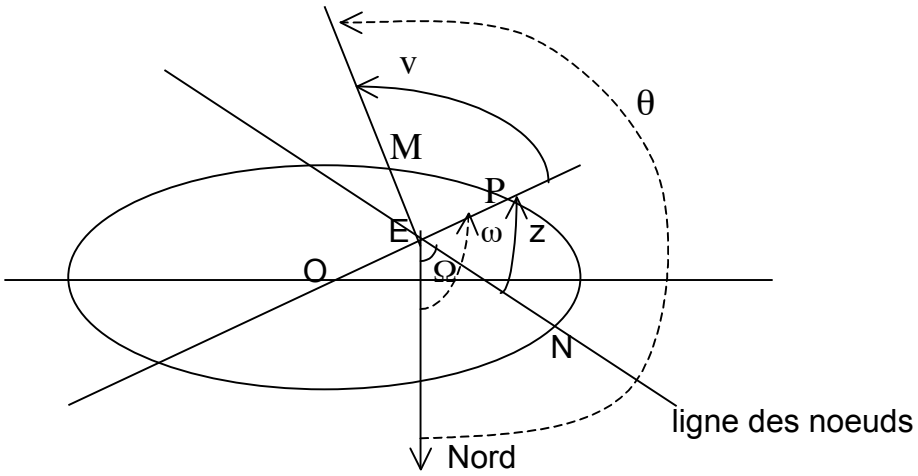
$$\boxed{\sin \hat{d} = \sin \hat{z} / \sin \hat{\omega}} \quad (5)$$

C'est ainsi que les relations de transition (1), (2) et (3) que nous avons établies à la page 13, et que nous rappelons ici :

R = ρ.sinv / sinV.sind
ρ.cosv = R.cosV.cosj +/- R.sinV.cosd.sinj
cotan**V** = (cotanv -/+ cotand.sinj) sind / cosj

sont utilisables à partir des éléments de Campbell définis p.14.

(Rappel : R et V sont les coordonnées de l'étoile principale E sur l'ellipse vraie (E est alors au foyer) en prenant le grand axe comme origine des angles; ρ et v sont les coordonnées de E sur l'ellipse apparente, projection de R et de V (en général, E n'est pas au foyer de cette ellipse). v est obtenu par la différence entre θ et l'angle ω ; voyez les éléments de Campbell p.14)



Sur cette figure représentant l'ellipse apparente, (E l'étoile principale, M l'étoile secondaire) nous avons :

$\omega = \Omega + z$; $\theta = \omega + v$; $\theta = \Omega + z + v$

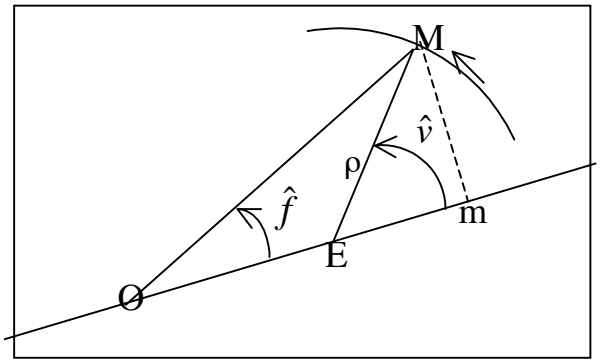
Lorsque l'ellipse vraie est parfaitement définie en grandeur et en position, il est possible de retrouver tous les points de l'ellipse apparente en ρ et v, à partir des points de l'ellipse vraie en R et V. On peut même définir les points remarquables de l'ellipse vraie : sommets, extrémité du périastre, également les extrémités de la ligne des noeuds, pour laquelle il suffit de faire ρ = R dans les relations de transition. [3]

[3] - Pour les sommets, on fera R = A.(1-Ex) et R = A.(1+Ex), et V = 0° et 180° ; pour les sommets secondaires : R = A et –cosV = A.Ex , sinV = A. $\sqrt{(1-Ex^2)}$. Pour les extrémités du paramètre: R = A.(1-Ex^2) et V=+/-90° ; et les valeurs de r et de v découlent directement de ces valeurs de R et V.

Le compagnon sur l'orbite vraie suit exactement la loi des Aires, c'est pourquoi, une fois que cette orbite est déterminée, l'éphéméride est possible. Elle devient très aisée, si l'on tient compte du « CENTRE CHRONOGRAPHIQUE», à partir duquel on comptera le temps. C'est donc les équations du mouvement que nous allons étudier dans le chapitre suivant.

Retour à l'orbite apparente à partir des éléments de Campbell.

Il est aisé de déterminer point par point le tracé de l'ellipse apparente et d'en faire le dessin, en tenant compte non seulement des coordonnées d'espace, mais de temps, à partir de chaque position dans l'espace et le temps du compagnon sur l'orbite vraie (dans l'espace), coordonnées R et V. Il suffit en effet d'utiliser les formules de transition établies p.13 et rappelées page précédente.



Toutefois pour la commodité du dessin on peut opérer de la manière suivante : considérons la figure ci-contre : soit M la projection du compagnon sur le plan de l'orbite apparente, O le centre, E l'étoile principale. On fait le calcul de OE par l'expression : OE = EH.cos $\hat{j}$ (fig. p.20) , OE = AEx.cos $\hat{j}$, et l'on détermine une échelle d'unité appropriée. OE suffit ainsi à déterminer une grandeur et une direction.
On peut ainsi, pour chaque point M (ρ et v par rapport à E) résoudre le triangle OEM, calculer le rayon central OM et l'angle $E\hat{O}M$ que nous appelons $\hat{f}$. Le calcul de OM se fait aisément par la relation métrique du triangle quelconque, en remarquant que $\hat{v}$ est toujours l'angle extérieur à ce triangle :

$$OM^2 = OE^2 + \rho^2 + OE.\rho.\cos\hat{v}$$

l'angle $\hat{f}$ sera donné par sa tangente : $\tan\hat{f}$ = Mm / OE + Em ; Mm = ρ.sin $\hat{v}$ et Em = ρ.cos $\hat{v}$

d'où $\tan\hat{f} = \rho.\sin\hat{v} / (OE + \rho.\cos\hat{v})$ et $\sin\hat{f} = \rho.\sin\hat{v} / OM$

Il conviendra selon le quadrant considéré d'ajouter soit 180°, soit 360° à l'angle $\hat{f}$.

OM obtenu par la racine positive passe par une valeur maximale pour une certaine valeur de ρ et de $\hat{v}$; cette valeur est a : demi grand axe de l'ellipse apparente ; de même, OM passe par une valeur minimale pour une valeur de $\hat{v}$ différente de 90° de la précédente ; cette valeur est b : longueur du petit axe. La connaissance de a et de b conduit à celle de e et de $\hat{k}$.

Enfin la surface de l'ellipse apparente est obtenue par la surface de l'ellipse vraie multipliée par cos $\hat{i}$. D'où ab = AB.cos $\hat{i}$. Cette relation permet soit d'évaluer b lorsque l'on connaît a, soit de vérifier la cohérence des mesures de a et de b avec les données de l'orbite vraie.

N.B. Pour l'instant, je ne vois de solution facile pour retrouver les éléments a, b, e, et $\hat{k}$, (d'où l'on est parti dans la méthode exposée ici, à partir des seuls éléments de Campbell), que par le recours à la construction de l'ellipse apparente point par point. La méthode analytique par l'équation cartésienne de l'ellipse, avec le changement de variables x = αX - βY et y = βX + αY, aboutit à des calculs très difficiles (α et β coefficients angulaires).

Chapitre 6 : L'équation du mouvement

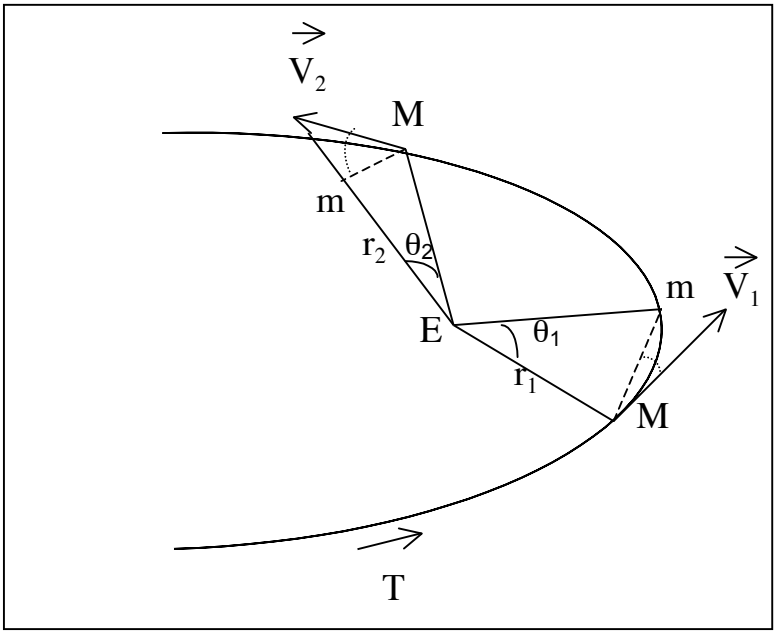
Le lecteur désireux de comprendre parfaitement les lois de Képler et de Newton pourra se référer aux traités spécialisés de mécanique céleste [4].

Nous étudierons successivement dans ce chapitre :

1- Rappel de la « loi des aires » et brève explication.
2- L'équation de Képler : définition du temps exact χ à partir du secteur d'ellipse.
3- Solution paramétrique de l'équation de Képler.
4- Relation entre l'angle û et l'angle $\hat{t}$ compté du « centre chronographique ».
5- Calcul de R = FM = EM ; et de l'angle $\hat{V}$: « l'anomalie vraie » , en fonction de a et de û.
6- Etablissement de « l'éphéméride » à partir de l'angle $\hat{t}$.
7- Considérations concernant l'accélération et la décélération du compagnon.

°°°°°°°°°°°

1-Rappel et brève explication de la « loi des aires ».



Lors de son mouvement sur l'orbite, le compagnon n'est accéléré ou retardé que par l'attraction qu'il reçoit de l'étoile principale, compte tenu de la direction de son mouvement par rapport au rayon vecteur qui le relie à l'étoile principale : le moment cinétique reste donc constant.

Considérons la figure ci-contre ; Soit T la trajectoire du compagnon M, soit E l'étoile principale, et V le vecteur vitesse, porté sur la tangente en M à la trajectoire. Nous allons projeter ce vecteur vitesse en élevant en M la perpendiculaire au rayon EM.

Nous voyons immédiatement que cette projection Mm n'est constante dans le temps – signifié par l'angle θ - que si la trajectoire est un cercle. A mesure que M s'éloigne de E, l'angle du vecteur vitesse avec sa projection augmente. Inversement lorsque M se rapproche de E : l'angle diminue.

Le moment cinétique **K** est le produit du rayon vecteur EM (= r) par la projection Mm du vecteur vitesse. Mm est fonction du rayon r et de la vitesse V ; pour un très petit angle, (pour la commodité de la figure, l'angle θ est beaucoup exagéré), V est égale à la différentielle de l'angle θ par rapport au temps t. ($V = d\theta / dt$) ; soit $Mm = r.d\theta / dt$; d'où :

K = $r.r.d\theta / dt$; $\boxed{K = r^2.d\theta / dt}$ **K** est une constante.

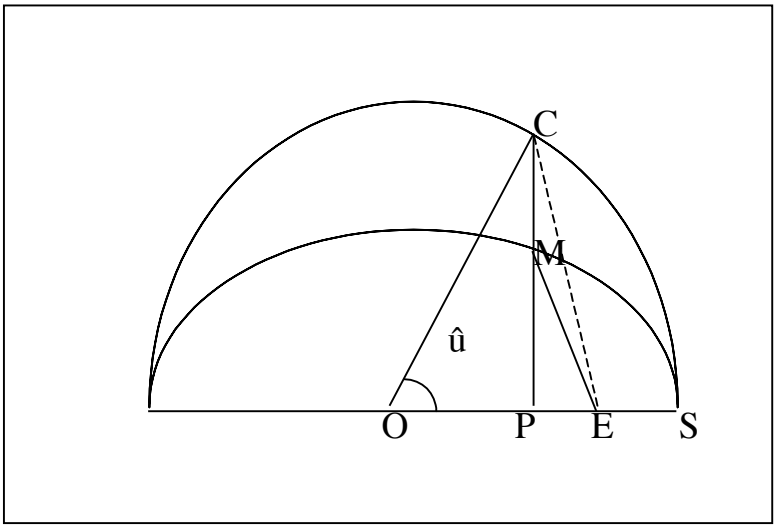
[4] - Par exemple « L'encyclopédie scientifique de l'Univers » publiée par le Bureau des Longitudes, ch.2 : « Mécanique du système solaire ».

Cette expression est la différentielle du secteur angulaire dont E est le sommet et la base Mm. [5] Cela signifie que la surface de ce secteur d'ellipse demeure constante avec le temps : c'est la LOI DES AIRES . Elle s'applique dans l'ellipse vraie, (et par projection dans l'ellipse apparente).

C'est sur elle que nous nous appuyons pour étudier le mouvement et établir son équation : c'est-à-dire sa représentation mathématique exacte.

°°°°°°°°°°°

2-**L'équation de Képler : définition du temps χ à partir du secteur d'ellipse**



Soit S le sommet de l'ellipse vraie et périastre : origine des temps. E est l'étoile principale au foyer de l'ellipse vraie, M le compagnon sur l'ellipse ; et nous figurons le « cercle directeur » dans le même plan, – dont l'ellipse est en fait la projection.

Du moment que l'aire engendrée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps, il convient de définir le temps par cette surface : celle du secteur d'ellipse déterminé par le rayon vecteur EM qui joint les 2 étoiles, compté à partir du périastre S: origine des temps.
Soit l'aire SEM.

Comme pendant la période entière, le rayon vecteur aura fait le tour de l'ellipse, le rapport du secteur d'ellipse à la surface de l'ellipse entière exprimera la fraction exacte de la période correspondant à la position du compagnon M.

Nous n'avons représenté que la moitié de l'ellipse correspondant à la moitié de la période, sachant que par symétrie les temps se reproduisent pour les quadrants 3 et 4.

PC perpendiculaire à OS passe par M et rencontre le cercle directeur en C. L'angle $S\hat{O}C$ = û, est appelé « l'anomalie excentrique » [6]. Soit **a** le demi grand axe OS et rayon du cercle directeur, et **e** l'excentricité de l'ellipse vraie, conformément aux notations habituelles.

L'aire de l'ellipse sous-tendue par l'angle $S\hat{E}M$ exprime le temps exact χ que le compagnon a mis pour atteindre sa position en M. Il suffira donc géométriquement d'établir le rapport de cette surface avec la surface de l'ellipse, pour avoir une expression exacte du temps.

Nous calculons cette surface SEM par le moyen du cercle directeur, en la considérant comme la projection de l'aire SEC, multipliée par le cosinus de l'angle de la projection (φ). Or nous avons vu en p.2 que cos φ = $\sqrt{(1-e^2)}$; et aussi cos φ = b/a.

---

[5] - Pour de très petits angles la longueur Mm se confond avec l'arc sous-tendu par l'angle θ

[6] - Terme de Képler, utilisé lorsque que l'on plaçait encore le Soleil au centre des orbites planétaires, malgré les irrégularités que décrivaient les planètes sur leurs orbites supposées alors circulaires.

L'aire SEC est la différence entre la surface du secteur couvert par l'angle û et la surface du triangle OEC. La surface du secteur û est û.a^2 / 2 (demi-ellipse) ; (en radian cette surface est égale à û / 2 car le rayon est alors pris pour unité) ; et la surface du triangle OEC est : (OE x PC) / 2.

OE = ae , et PC = a.sinû

On aura donc pour la surface SEM exprimant le temps exact χ :

$$\chi = (\frac{a^2 \hat{u}}{2} - \frac{ae.a\sin\hat{u}}{2}).\sqrt{(1-e^2}$$

Lorsque l'on compare cette grandeur à celle de l'ellipse entière, - seule révolution du compagnon - l'expression se simplifie, le coefficient $a^2\sqrt{(1-e^2)}$ disparaît, et il reste seulement :

χ = û – e.sinû exprimant une fraction de la période entière du compagnon.

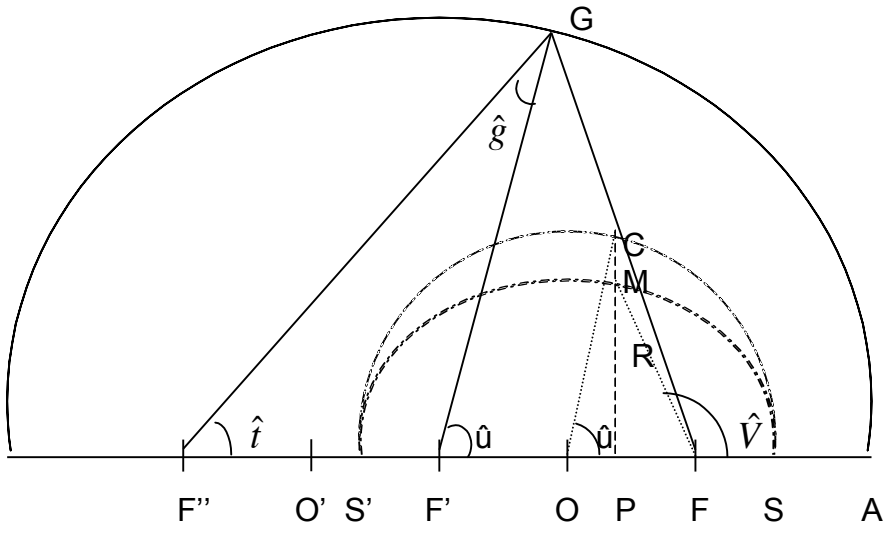
N.B. – Il faut impérativement exprimer û en radians au 1er terme du second membre, mais on peut l'exprimer en degrés dans l'expression sinû, pour la commodité des calculs.

Telle est « **l'équation de Képler** », dans sa forme la plus simple. C'est une équation dite « transcendante », car le second membre ne peut être résolu que par récurrence, ou approximations successives. Pour cette fraction de période donnée, on cherche alors l'angle û. Des tables ont été établies pour la solution de cette équation [7] pour diverses valeurs de e. Leur usage est long et pénible. - On confie aujourd'hui le travail aux ordinateurs programmés pour ce calcul de récurrence.

Pour éviter les ennuis de la résolution d'une équation transcendante, il convient de choisir un paramètre indépendant : une variable, par laquelle seront établies les coordonnées d'espace et de temps sur l'orbite vraie.

°°°°°°°°°°°°

3-**Solution paramétrique de l'équation de Képler**



[7] - dont on trouvera des extraits dans le livre de Mr Paul Couteau : « L'observation des étoiles doubles visuelles ».

Considérons la figure ci-dessus : le cercle générateur (voyez p.3) a pour centre F' [8] foyer secondaire de l'ellipse de centre O et de foyer principal F = E, l'étoile principale. Le cercle directeur de centre O est homothétique du cercle générateur : rapport 1/2. Le point M définit la position du compagnon sur son orbite. FM = R est le rayon vecteur. L'aire SFM représente le temps exact χ défini ci-dessus. Rappelons que c'est au périastre S, sommet de l'ellipse vraie, que la vitesse du compagnon est la plus grande, à l'apoastre S' qu'elle est la plus petite ; F'' est le symétrique de F par rapport à F' : je l'appelle le « **centre chronographique** », à partir duquel je vais établir mon paramètre, l'angle $\hat{t}$, que je vais faire tourner de 0° à 360°, proportionnellement au temps, du fait qu'il est compté, non pas sur l'ellipse, mais sur le cercle générateur.

FC = CG, selon la construction du cercle générateur; traçons F''G**.** Notre variable indépendante : l'angle $\hat{t} = F'\hat{F}''G$, va permettre de calculer:

- l'angle û, et par conséquent le temps exact χ exprimé en fraction de la période du compagnon. D'où l'on pourra déduire la date en connaissant celle du passage au périastre.
- le rayon vecteur R = FM, en fonction du grand axe de l'ellipse vraie (que l'on peut prendre pour unité), et de son excentricité.
- l'angle $\hat{V}$, appelé « anomalie vraie » [9], angle du grand axe de l'ellipse vraie et de la position du compagnon. Cet angle n'est jamais proportionnel au temps. Pour des temps égaux l'arc SM grandit d'abord très vite, puis de moins en moins vite à l'approche de l'apoastre.

4-Relation entre l'angle û et l'angle $\hat{t}$ compté à partir du centre chronographique F''

L'angle û (décrit p.27) se retrouve en $S\hat{F}'G$; il est extérieur à l'angle $F''\hat{F}'G$, et donc égal à : û = $\hat{t}$ + $\hat{g}$;

Dans le triangle F''F'G, on a la relation des sinus : F''G / sin û = F''F' / sin $\hat{g}$ = F'G / sin $\hat{t}$.

Or F'G = 2a (a demi grand axe de l'ellipse vraie) et F''F' = 2ae (e excentricité de l'ellipse vraie). Donc : 2ae / sin $\hat{g}$ = 2a / sin $\hat{t}$; d'où :

sin $\hat{g}$ = e. sin $\hat{t}$; nous obtenons l'angle $\hat{g}$, d'où la valeur de l'angle û, puisque û = $\hat{t}$ + $\hat{g}$

Connaissant û, nous retrouvons très aisément le temps exact χ par l'équation de Képler :

χ = û – e.sinû

5-Calcul de R = FM = EM ; et de l'angle $\hat{V}$, en fonction de a et de û.

Considérons le triangle FMP, où l'on écrit : $R^2 = FP^2 + PM^2$; en valeur absolue : $|FP| = |FO| + |OP| = |ae| + |a.\cos\hat{u}|$, et PM = PC.cos φ (φ angle de la projection permettant de passer du cercle à l'ellipse). Comme PC = a.sinû, et que cos φ = $\sqrt{(1-e^2)}$, il vient :

[8] - Ce point F', symétrique du foyer principal par rapport au centre de l'ellipse portait autrefois le nom de « point équant » par les astronomes contemporains de Képler, car c'est le lieu d'où l'on voit –approximativement- le déplacement de la planète sur son orbite en des arcs proportionnels au temps.

[9] - Képler l'appela ainsi lorsqu'il comprit que les orbites planétaires étaient des ellipses et que le Soleil se trouvait précisément au foyer F. Le mot « anomalie » est resté pour indiquer que la vitesse du compagnon varie sur son orbite.

PM = a.sinû. $\sqrt{(1-e^2)}$; d'où R^2 :

$R^2 = (|ae| + |a.\cos\hat{u}|)^2 + (a.\sin\hat{u}.\ \sqrt{(1-e^2)})^2$

Le développement des calculs (en remplaçant $\sin^2\hat{u}$ par $1-\cos^2\hat{u}$) aboutit par simplification à l'expression de R :

$$R = a(1 - e.\cos.\hat{u})$$

Ensuite, en écrivant $\cos\hat{V}$ = $|FP|$ / R, comme $|FP| = |ae| + |a.\cos\hat{u}|$ et en remplaçant R par sa valeur, il vient :

$$\cos\hat{V} = \frac{(\cos\hat{u} - e)}{(1 - e.\cos\hat{u})}$$ d'où l'angle $\hat{V}$, angle de « l'anomalie vraie ».

°°°°°°°°°

6-**<u>Etablissement de « l'éphéméride » à partir de l'angle $\hat{t}$.</u>**

En faisant varier l'angle $\hat{t}$ de 0° à 360°, on détermine automatiquement les angles $\hat{g}$, û, $\hat{V}$, et le rayon vecteur R, compte tenu de l'excentricité de l'orbite vraie, qui, à elle seule, commande le mouvement suivant la loi des aires. Les diverses valeurs de $\hat{t}$ peuvent être aussi serrées que l'on veut, et donnent ainsi en χ le temps exact de chaque position du compagnon parfaitement définie par R et $\hat{V}$.

Ensuite les formules de transition établies p.13 et rappelées p.26 donnent pour chaque valeur de χ les positions de la projection du compagnon sur l'orbite apparente, à savoir l'éphéméride : c'est-à-dire les tables donnant au cours du temps les valeurs calculées de la position du compagnon sur l'orbite apparente: l'écartement ρ des deux étoiles et l'angle θ qu'elles forment avec une direction donnée (le Nord) : $\theta = v + \omega$ (p.26).

Rappelons que le calcul des éphémérides ne peut se faire que lorsque l'on a « relevé » l'ellipse apparente (ch.3), et déterminé dans l'espace la position réelle de la trajectoire du compagnon autour de l'étoile principale.

°°°°°°°°°

7-**<u>Considérations concernant l'accélération et la décélération du compagnon</u>**.

Pour donner une idée visuelle de cette variation de vitesse du compagnon, nous pouvons construire à partir du point F'', un angle $\hat{Y}$, qui exprimera en <u>degrés</u> la valeur du temps χ donné en <u>radians</u> dans la formule ci-dessus.

La comparaison des angles $\hat{t}$ et $\hat{Y}$ est très significative de cette accélération et décélération du compagnon. Lorsque $\hat{Y}$ = $\hat{t}$ nous sommes au point de l'orbite qui donne l'équidistance des temps entre le périastre et l'apoastre, soit le quart de la période.

°°°°°°°°°°°

Chapitre 7 – Affinement de l'ellipse apparente à partir des mesures

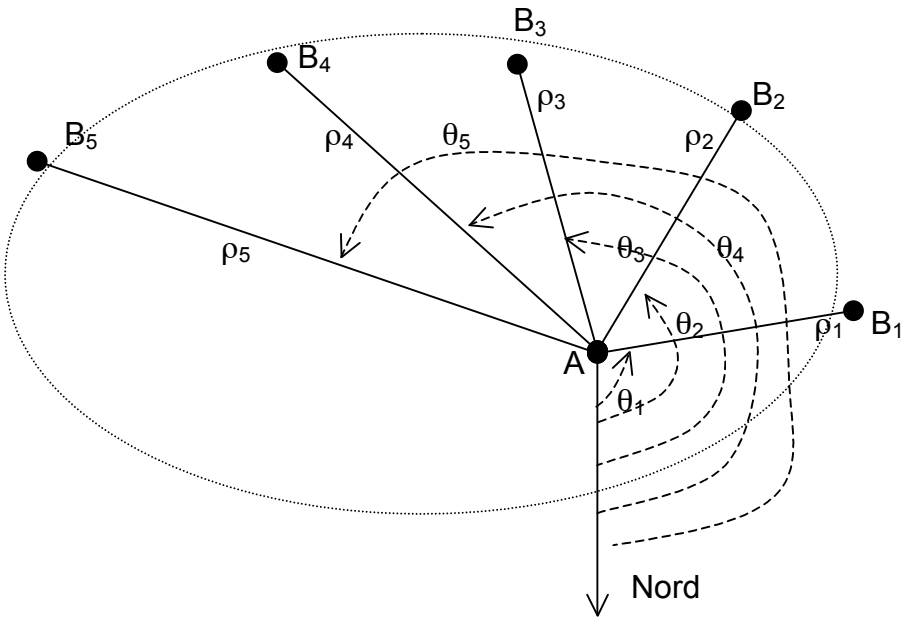
1°- Discernement des mesures et construction de l'orbite apparente

En principe il convient de faire confiance aux observateurs ; toutefois les observateurs entraînés méritent plus de confiance. Une mesure aberrante par rapport à de nombreuses autres peut être simplement le fait d'un erreur d'écriture, qu'il conviendra de rectifier.

Les mesures en ρ (d'écartement des deux étoiles) - et en θ (angle qu'elles font avec une direction privilégiée : le Nord) des observateurs, sont portées à l'aide de la règle et du rapporteur sur une feuille de papier, moyennant une échelle appropriée. Il est bon de fixer le rapporteur par son centre à l'aide d'une épingle pour éviter de le déplacer à chaque mesure, de même de faire une légère encoche dans la règle au 0 pour qu'elle s'appuie sur l'épingle fixée en A, représentant l'étoile principale.

Il convient d'avoir un nombre de mesures dépassant la demi période pour tenter raisonnablement l'étude d'une orbite. Le mieux est d'avoir évidemment l'orbite entière.

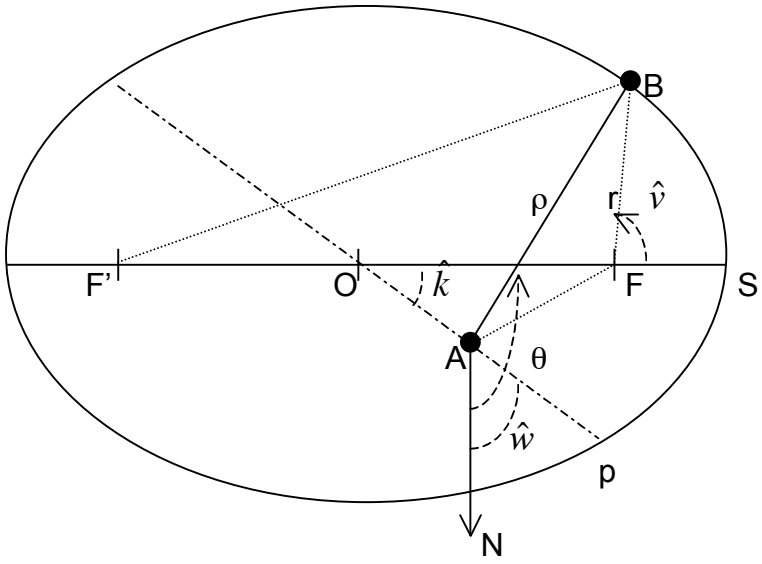
Appelons A et B les deux étoiles, B la secondaire qui se déplace sur son orbite.



Lorsque les mesures sont marquées par des points sur la feuille de papier, il faut les encadrer au mieux pour déterminer les deux axes de l'orbite apparente ; puis, soit dessiner directement une orbite, soit la dessiner sur une feuille de papier transparente, de manière à la déplacer jusqu'à l'ajuster le plus exactement possible aux mesures.

Cette opération bien menée conduit à déterminer le grand axe, le petit axe, l'excentricité, puis les foyers de l'orbite apparente. (fig.ci-dessous)

On mesure aussi la distance OE, projection du grand axe de l'orbite vraie et direction du périastre p ; l'angle $\hat{k}$ du grand axe de l'orbite avec la direction OE, et l'angle $\hat{w}$ entre la direction du nord, origine des mesures, et la direction OE du périastre.



2°- Principe géométrique de l'affinement de l'orbite apparente

Le principe de l'affinement de l'ellipse apparente consiste :

1- à partir de l'équation de l'ellipse.
2- à comparer l'écartement ρ de la mesure avec le ρ donné par l'équation, et ceci pour chaque angle θ.
3- à modifier les paramètres de l'ellipse jusqu'à ce que la différence entre l'observation et le calcul soit la plus petite possible pour chaque mesure, et si possible égale à 0.

°°°°°°°°

Voici une méthode simple et rapide pour effectuer ce travail :

Soit r = FB, le rayon vecteur, et $\hat{v} = S\hat{F}B$. OS = **a**, et **e** l'excentricité.
L'équation polaire focale de l'ellipse (exposée p.6) nous permet d'écrire :

$r(1 + e.\cos\hat{v}) = a(1 - e^2)$; r et $\hat{v}$ varient dans le temps, a et e sont invariables, donnés par l'ellipse choisie.

Comme FB + F'B = 2a, cette longueur 2a doit être la même pour tout point de l'ellipse. Il suffit de comparer cette longueur donnée par la mesure à celle donnée par le calcul.

- Si la longueur mesurée est plus petite que celle calculée, le compagnon B est à l'intérieur de l'ellipse, et l'ellipse est trop grande ou mal orientée.
- Si cette longueur est plus grande, le compagnon B est à l'extérieur de l'ellipse, l'ellipse est trop petite ou mal orientée en sens inverse.
- Les sommations partielles permettent de se faire une idée de la bonne orientation ou de la bonne excentricité qu'il convient de donner.

Pour évaluer r et $\hat{v}$ en fonction de ρ et θ.

Certes, on peut mesurer r et $\hat{v}$ sur le dessin, en fonction de chaque mesure de ρ et θ.

On peut aussi calculer r et $\hat{v}$ en fonction de ρ et θ :

Pour connaître r :

Dans le triangle AFB, on écrit la relation métrique:

$r^2 = \rho^2 + AF^2 - 2.AF.\rho.\cos F\hat{A}B$ or $F\hat{A}B = \theta - N\hat{A}F$, cet angle $N\hat{A}F$ est mesurable sur le dessin de l'orbite.

$\boxed{r^2 = \rho^2 + AF^2 - 2.AF.\rho.\cos(\theta - N\hat{A}F)}$ On peut donc connaître **r**.

Reste à évaluer l'angle $\hat{v}$

On écrit dans le triangle AFB la relation des sinus :

$r / \sin F\hat{A}B = \rho / \sin A\hat{F}B = AF / \sin F\hat{B}A$

Les deux premiers termes suffisent car r vient d'être calculé, et ρ est connu.

$F\hat{A}B = \theta - N\hat{A}F$

On écrit donc : $r.\sin A\hat{F}B = \rho.\sin(\theta - N\hat{A}F)$ et donc $\sin A\hat{F}B = \rho / r\ (\sin(\theta - N\hat{A}F)$

Or $A\hat{F}B = A\hat{F}O + O\hat{F}B$; $O\hat{F}B = 180° - \hat{v}$ et $A\hat{F}O$ est connu.

Donc : $A\hat{F}B = A\hat{F}O + 180° - \hat{v}$

$\sin A\hat{F}B = \boxed{\sin(A\hat{F}O + 180° - \hat{v}) = (\rho / r)(\sin(\theta - N\hat{A}F)}$ d'où l'on extrait $\hat{v}$

1- L'évaluation de $\hat{v}$ en fonction du sinus ne suffit pas ; il faudra le situer dans les divers quadrants. Il vaut mieux avoir une évaluation de l'angle $\hat{v}$ en fonction du cosinus.

On peut donc écrire toujours dans le triangle AFB :

$\rho^2 = AF^2 + r^2 - 2.AF.r.\cos A\hat{F}B$

D'où $\cos A\hat{F}B = (\rho^2 - AF^2 - r^2) / -2.AF.r = (AF^2 + r^2 - \rho^2) / 2r.AF$

Comme l'angle $A\hat{F}B = A\hat{F}O + 180° - \hat{v}$, on aura donc :

$\boxed{\cos(A\hat{F}O + 180° - \hat{v}) = (AF^2 + r^2 - \rho^2) / 2r.AF}$ d'où l'on extrait $\hat{v}$

L'angle $\hat{v}$ est donc connu par son sinus et son cosinus, ce qui permet de faire le tour de l'ellipse sans ennui.

On peut donc maintenant porter les valeurs de r et de $\hat{v}$ dans l'équation de l'ellipse :

$r(1 + e.\cos\hat{v}) = a(1 - e^2)$

puis affiner l'équation en appréciant les valeurs de **e** et de **a** jusqu'à ce que l'ellipse apparente coïncide au mieux avec les observations données par ρ et θ.

°°°°°°°°°

Il est également possible d'évaluer r et $\hat{v}$ en fonction de ρ et θ, à partir de l'équation polaire centrale de l'ellipse (exposée p.5).

Conclusion

Le lecteur attentif qui aura eu la patience de nous suivre au cours de ces pages ne manquera pas, au terme de son effort, d'être émerveillé et encouragé : émerveillé par la simplicité de cette méthode, puisque par la mesure de **4 éléments** seulement [10], le problème naguère si difficile du relèvement de l'ellipse vraie et de l'équation du temps se trouve résolu, et cela d'une manière géométriquement rigoureuse. Il sera ensuite encouragé dans son effort pour obtenir les paramètres aussi conformes que possible avec les observations antérieures, ou ses propres observations, pour arriver en définitive à la connaissance des masses des étoiles.

Toutefois, une question reste en suspend : lorsque sont donnés les éléments de Campbell, pour les étoiles orbitales figurant dans les catalogues, il nous semble impossible de retrouver, à partir de ces éléments, les paramètres de l'orbite apparente, sinon par le tracé de cette ellipse et sa mesure sur le papier. Je n'ai pas trouvé de méthode purement géométrique, permettant d'obtenir les 4 éléments (a, b ou e, OE et $\hat{k}$) de l'ellipse apparente à partir des éléments de Campbell.

Les Etoiles Doubles

Montez jusqu'au sommet de la voûte des cieux,
Et vous verrez là-haut, dans les profonds espaces,
Des soleils flamboyants les lumineuses traces,
qui vous révèleront des secrets merveilleux.

Les astres embrasés vont souvent deux par deux,
Un invisible attrait les tient et les enlace,
Dans une ronde folle où gravite leur masse,
Jusqu'à se dévorer tout en mêlant leurs feux.

Ainsi l'Épi, Mizar, Albiréo du Cygne,
Capella du Cocher qui de loin nous fait signe,
Lorsque près du Zénith elle atteint la hauteur.

En la longueur des temps les géantes lointaines,
Semblent ne pas bouger sur leurs orbes sereines,
L'unité de leur couple : un éternel bonheur.

Abbé Joseph GRUMEL
Marie-Pierre Morel
1984-2007

[10] - le demi grand axe **a** de l'ellipse apparente, son petit axe **b** (ou l'excentricité **e)**, la distance **OE**, et l'angle $\hat{k}$ entre le grand axe et la droite OE.